TRATADO ELEMENTAL *DE GEOMETRÍA*, APLICACION DEL ÁLGEBRA Á LA GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA RECTILINEA.

Para el uso de la escuela de matemáticas del ilustre consulado de Bilbao.

Contiene muchas aplicaciones á la geodesia y un apéndice sobre pesos y medidas españolas y su correspondencia con las unidades del sistema decimal, y algunas observaciones sobre las prácticas de agrimensura, aforos y arqueo de buques.

POR D. A. L.

Quidquid praecipies, esto brevis.
Horat.

CON LAS LICENCIAS NECESARIAS.

EN BILBAO:

POR DON PEDRO ANTONIO DE APRAIZ.

1819.

ADVERTENCIA.

En esto tratado hemos seguido, como en los de la aritmética y álgebra, el órden de ideas de Francoeur: pero nos hemos separado de su manera de demostrar, supliendo las ideas intermedias, y colocando el título del teorema antes de la demostracion; método sumamente estimado de los geómetras antiguos, y muy acomodado al carácter y enlace particular de los principios geométricos.

En la trigonometría hemos preferido las demostraciones analíticas á las gráficas, porque aunque este ramo es un problema particular de la geometría, no está sometido á la regla y al compas, sino al cálculo, cuyos resultados se vén mejor en la fórmulas que en las figuras. Esta consideracion nos ha movido tambien á variar la idea, que generalmente se dá en los elementos de las cantidades lineo-angulares. Si en último resultado, no son mas que relaciones, ó números, parece que esta idea debe preceder á toda su teoría. Por esto hemos considerado los senos y tangentes, no como lineas sino como relaciones de lineas; nocion, que esparce mucha luz sobre el uso de estas cantidades en la teoría analítica de la línea recta, y por consiguiente en la de las curvas.

Se ha puesto al fin de este tratado un apéndice de pesos y medidas. Como para la inte-

ADVERTENCIA.

En este tratado hemos seguido, como en los de aritmética y álgebra, el órden de ideas de Francoeur: pero nos hemos separado de su manera de demostrar, supliendo las ideas intermedias, y colocando el título del teorema antes de la demostracion; método sumamente estimado de los geómetras antiguos, y muy acomodado al caracter y enlace particucular de los principios geométricos.

En la trigonometría hemos preferido las demostraciones analíticas á las *gráficas*, porque aunque este ramo es un problema particular de la geometría, no está sometido á la regla y al compas, sino al cálculo, cuyos resultados se vén mejor en la fórmulas que en las figuras. Esta consideracion nos ha movido tambien á variar la idea, que generalmente se dá en los elementos de las cantidades líneo-angulares. Si en último resultado no son mas que *relaciones ó números*, parece que esta idea debe preceder á toda su teoría. Por esto hemos considerado los senos y tangentes, no como líneas, sino como relaciones de líneas; nocion, que esparce mucha luz sobre el uso de estas cantidades en la teoría analítica de la línea recta, y por consiguiente en la de las curvas.

Se ha puesto al fin de este tratado un apéndice de pesos y medidas. Como para la inteligencia perfecta de las unidades de superficie y volumen es necesario el conocimiento previo de la geometría, por eso hemos reservado para este lugar una noticia, que, aunque generalmente suele darse en los tratados de aritmética, es en gran parte ininteligible para los que ignoran la ciencia de la estension.

Las numerosas aplicaciones á la geodesia, y la noticia sucinta que damos de las prácticas mas comunes en la medicion de tierras, aforos y arqueo de buques, tienen por objeto mostrar de qué manera deben aplicarse los principios teóricos á estos diferentes ramos. Una instruccion mas estensa y profundizada de ellos no es propia de un tratado elemental de geometría.

Nota. El autor no reconoce por suyos sino los egemplares que lleven este sello.

GEOMETRÍA.

1. Geometría es la ciencia, que examina las propiedades de la cantidad estensa. Todo cuerpo es estenso, y tiene longitud, latitud y profundidad. Los límites, que terminan el cuerpo, se llaman *superficies*, y solo se consideran en ellas longitud y latitud. Los límites de las superficies se llaman *líneas*, que solo tienen longitud. Los límites de la línea se llaman puntos, en los que no se considera estension alguna.

Artículo 1.º Medida de las líneas y arcos.

2. La línea se divide en *recta*, *quebrada y curva*. Línea recta es la mas breve distancia entre dos puntos. Quebrada, la que se compone de líneas rectas, sin formar toda ella una línea recta. Curva, la que ni es recta, ni quebrada.

De un punto á otro no se puede tirar mas que una línea recta; pues la distancia mas corta debe ser una sola.

La verdadera distancia de un punto á otro se mide por la línea recta tirada entre ámbos: porque, siendo la mas breve, es la mas fácil de medir, y siendo la única, que se puede tirar entre los dos puntos, no hay otra con quien equivocarla.

Dos rectas no se pueden cortar mas que en un punto: pues si pudieran cortarse siquiera en dos, tendrian dos puntos comunes, y por ellos podrian pasar dos rectas, contra lo demostrado.

Una recta se puede prolongar indefinidamente por ámbas partes: y si en ella se toman dos puntos cualesquiera, la recta, que los uniese, coincidiria en toda su estension con la primera: pues sino, podrian pasar dos rectas por dos puntos.

Una superficie es *plana*, cuando la recta, que une dos cualesquiera de sus puntos, coincide con la superficie en toda su estension.

3. Dos rectas se suman colocando la una en la prolongacion de la otra. Se restan, tomando el subtraendo sobre el minuendo.

Una recta se multiplica por un número, sumándola con ella misma tantas veces, como unidades tenga el multiplicador.

La medida comun de dos rectas se halla, colocando la menor sobre la mayor cuantas veces se pueda, colocando el residuo sobre el divisor cuantas veces se pueda, y continuando la misma operacion hasta que un residuo quepa exactamente en el anterior: este último residuo será la medida comun de ámbas rectas: y la razon que tengan entre si los números de veces, que contienen á la medida comun, será la razon de ámbas rectas: porque sea d la medida comun, m y n dichos números: las rectas serán md y nd, y su razon $\frac{md}{nd}$, ó $\frac{m}{n}$; es decir, la razon de los números de veces, que contienen la medida comun.

Medir una recta es buscar su relacion con otra recta, que se toma por unidad. El número de veces, que la recta dada contenga á la unidad, representará su valor.

Las rectas son cantidades, que pueden someterse al cálculo, tanto aritmético, como álgebraico: pues pueden representarse por números.

Dos rectas son *incomensurables* entre sí, cuando al buscar su medida comun, no se halla residuo, que quepa exactamente en el anterior. En este caso se toma por medida comun aproximada el residuo, que se juzgue suficientemente pequeño.

4. Llámase contorno convexo el que no puede ser cortado por una recta, sino en dos puntos.

Proposicion 1.ª *De todos los contornos convexos que van de un punto á otro, es menor el que se acerca mas á la línea recta, que une los dos puntos.*

Demostracion. 1.° Sean los dos puntos A y B; 1
y sean los dos contornos convexos ADB, ACB, compuesto cada uno de dos rectas: digo que ACB es mayor que ADB. Porque, prolongando la AD hasta su encuentro en E con la CB, tenemos $DE + EB > DB$, por ser DB línea recta; y añadiendo á ámbas partes DA, será $AE + EB > AD + DB$. Tambien $AC + CE > AE$, por ser AE línea recta: añadiendo á ámbas partes EB, será $AC + CB > AE + EB$: pero $AE + EB$ se demostró mayor que $AD + DB$; luego con mas razon $AC + CB > AD + DB$.

2.° Sean los dos contornos convexos rectilíneos 2
ACDB, AEFGB. Prolongando la EF hasta que corte el contorno ACDB, será $ICDK > IK$, por ser esta línea recta: añadiendo á ámbas partes $AI + BK$, será $ACDB > AIKB$. Del mismo modo se demuestra que este contorno AIKB es mayor que el que resultaria prolongando hasta él la FG; y así hasta llegar al contorno AEFGB, que será el menor de todos.

3.° Sean en fin los dos contornos convexos cur- 3
vos AMB, ACB. Tiro la recta EF, que toque el contorno ACB. $EMF > EF$, por ser esta línea recta. Añadiendo á ámbas partes $AE + FB$, será AMB

AEFB. Tirando la *ki*, que toque el contorno ACB, se demostrará que AEFB > A*ik*FB, y de la misma manera tendremos un número indefinido de contornos, que cada vez se van haciendo menores conforme se van acercando al contorno ACB: pero cuando las cantidades, que están entre dos límites, aumentan acercándose al uno y disminuyen acercándose al otro, es prueba de que el primer límite es mayor que el segundo: luego el contorno AMB > ACB: luego, &a.

5. *Linea circular* es una curva, cuyos puntos están todos en un plano y distan igualmente de otro punto fijo. *Centro* es el punto fijo, que equidista de todos los de dicha línea, llamada *circunferencia* del espacio que encierra, al que se dá el nombre de *circulo*. *Radios* son las rectas tiradas desde el centro á la circunferencia. *Diámetro* es cualquier recta, que pasando por el centro, se termina en la circunferencia. *Arco* es cualquier porcion de la circunferencia. *Cuerda* es la recta, que une los dos estremos del arco. *Segmento* es el espacio comprendido entre el arco y la cuerda. *Segtor* es el espacio comprendido entre dos radios y el arco, que interceptan.

Los radios son iguales, porque miden la distancia del centro á la circunferencia, que es la misma en todos sus puntos. Los diámetros son iguales, porque cada uno vale el doble del radio. El diámetro divide por medio la circunferencia; porque si doblando el círculo por el diámetro, no coincidieran las dos partes de la circunferencia, los puntos de la una no distarian del centro tanto como los puntos de la otra.

 Prop. 2.ª *El diámetro es mayor que cualquier* *cuerda*: porque si al estremo de la cuerda AB tiramos el radio CB, será $AB < AC + CB$: pero la suma de los dos radios AC y CB es igual al diámetro: luego el diámetro es mayor que la cuerda AB.

Prop. 3.ª *Si dos arcos son iguales, lo serán sus cuerdas*: porque si los arcos son iguales, se podrán sobreponer el uno al otro, se ajustarán sus estremos, y por tanto las rectas que pasan por ellos, que son las cuerdas: luego &a.

Prop. 4.ª *Al mayor arco corresponde mayor cuerda.*

Dem. Sea el arco DF mayor que DB. Tiro los 5
radios CF, CB: tenemos que $CI + IF > CF$, por ser CF línea recta: pero $CF = CB$: luego $CI + IF > CB$. Restando de ámbas partes CI, es $IF > IB$; Añadiendo á ámbas partes ID, es $DF > DI + IB$: pero $DI + IB > DB$, por ser DB línea recta: luego con mas razon $DF > DB$: luego &a.

Si dos cuerdas son iguales, lo serán sus arcos: pues si estos no lo fueran, el mayor tendria mayor cuerda, contra el supuesto de ser las cuerdas iguales.

Medir un arco es buscar cuantas veces contiene á otro arco del mismo radio, que se toma por unidad. Para esto no es necesario poner en línea recta ó *rectificar* dichos arcos: podremos ver cuantas veces cabe un arco en otro, llevando sobre este la cuerda del primero cuantas veces se pueda, y las divisiones, que resulten, serán iguales al primer arco, pues tienen su misma cuerda. Si resulta residuo, se hallará la medida comun por el mismo método que en las rectas.

Los arcos pueden someterse á todas las operaciones del cálculo aritmético y álgebraico; pues pueden expresarse por números.

2.° *De los ángulos.*

6. *Ángulo* es la abertura de dos rectas, que concurren en un punto. *Vértice* del ángulo es el punto donde concurren las rectas que lo forman. *Lados* del ángulo son las rectas que lo forman.

Dos ángulos serán iguales, cuando coincidiendo el vértice y un lado, coincide el otro lado: pues habrá igual abertura entre los lados de cada ángulo.

La magnitud de un ángulo no pende del tamaño de sus lados: pues la abertura ó separacion de los lados es siempre la misma, sean estos mayores ó menores.

6 *Si dos ángulos son iguales, los arcos descritos desde sus vértices con un mismo radio deben ser iguales*: pues coincidiendo los ángulos, por ser iguales, el punto A' caerá sobre A por ser el radio $A'C' = AC$, y el punto B' caerá sobre B por ser el radio $C'B' = CB$: luego los arcos AB, $A'B'$ coincidirán y serán iguales.

Para hallar la mayor medida comun de dos ángulos, se podrá restar el menor del mayor cuantas veces se pueda, ajustándolos por el vértice y un lado, y viendo lo que queda del ángulo mayor: pero como al mismo tiempo se restan los arcos descritos desde sus vértices con un mismo radio, será mas fácil buscar la mayor medida comun de sus arcos, y el ángulo que corresponda á esta, será la mayor medida comun de los dos ángulos.

Prob. *Construir un ángulo igual á otro dado.* Sea C el ángulo dado: para construir en el punto C' un ángulo igual á C, desde C y C' con un mismo radio, describo los arcos AB determinado, y A'B' indefinido. Tomo sobre este B'A' = BA, tomando sus cuerdas iguales: y tirando C'A', el ángulo C' será = C; pues sus arcos son iguales.

7. Prop. 5.ª *Dos ángulos cualesquiera son proporcionales á los arcos descritos desde sus vértices con un mismo radio.*

Dem. Sean los dos ángulos BCA, DON, y los arcos ab y dn: ó estos son conmensurables ó inconmensurables.

Si son conmensurables, supongamos que su medida comun xd quepa m número de veces en ab, y n número de veces en nd. Será $\frac{ab}{nd} = \frac{m}{n}$. La mayor medida comun de los ángulos será xod, que cabrá m número de veces en ACB, y n número de veces en NOD: luego $\frac{\text{ACB}}{\text{NOD}} = \frac{m}{n}$: luego $\frac{\text{ACB}}{\text{NOD}} = \frac{ab}{nd}$.

Si los arcos son incomensurables, divido el arco nd en el número de partes iguales que quiera: y llevando una de ellas sobre el arco ba desde b, no podrá caer en a ningun punto de division, por la hipótesi de ser dn y ba inconmensurables: luego el último punto de division caerá en i, y siendo los arcos ib, nd conmensurables, serán como sus ángulos, esto es, $\frac{iCb}{\text{NOD}} = \frac{ib}{nd}$: pero $iCb = \text{ACB} + \text{IC}a$; $ib = ab + ai$: sustituyendo, será $\frac{\text{ACB}}{\text{NOD}} + \frac{\text{ACI}}{\text{NOD}} = \frac{ab}{nd} + \frac{ai}{nd}$. Ahora los primeros términos de cada miembro son límites invariables, y los segundos son incrementos disminuibles á voluntad: pues el ángulo ACI y el arco *ai* pueden hacerse cuan pequeños se quieran acercando el punto *i* al punto *a*, lo que se logra dividiendo el arco *nd* en mayor número de partes: luego los límites son iguales, pues hay ecuacion entre las variables, que se aproximan á ellos: luego $\frac{ACB}{NOD} = \frac{ab}{nd}$: luego &ca.

Prop. 6.ª *La medida de un ángulo es el arco descrito desde su vértice y comprendido entre sus lados.*

Dem. Sea el ángulo NOD la unidad á que se refieren los ángulos y su arco *nd* la unidad á que se refieren los arcos; siendo $\frac{ACB}{NOD} = \frac{ab}{nd}$, poniendo í por NOD y por *nd*, será $ACB = ab$; ecuacion, que quiere decir, que cualquier ángulo comprende á la unidad de los ángulos como su arco á la unidad que se tome para los arcos: luego la medida del ángulo es el arco que le corresponde.

Se llaman *arcos semejantes* los que miden un mismo ángulo, aunque descritos con diferentes radios, como *ab*, *a'b'*.

Prop. 7.ª *Los arcos semejantes son proporcionales á sus circunferencias.*

Dem. Los ángulos BCA, BCD son como sus arcos: es decir, $\frac{BCA}{BCD} = \frac{ab}{bd}$, y $\frac{BCA}{BCD} = \frac{a'b'}{b'd'}$: luego $\frac{ab}{bd} = \frac{a'b'}{b'd'}$; y componiendo será $\frac{ad}{a'd'} = \frac{ab}{a'b'}$. Continuando la misma operacion con otros ángulos y arcos hasta dar la vuelta al círculo, tendremos demostrado que los arcos semejantes *ab* y *a'b'* serán proporcionales á sus circunferencias.

3.° *Perpendiculares y oblicuas.*

8. Una recta es *perpendicular* á otra, cuando los dos ángulos, que forma con ella, son iguales. Una recta es *oblicua* respecto á otra, cuando los ángulos, que forma con ella, son desiguales.

Ángulo *recto* es el que forma una recta con otra, á la cual es perpendicular: su medida es la cuarta parte de la circunferencia ó el *cuadrante*: porque siendo BD diámetro, BAD es la mitad de la circunferencia; y como los ángulos rectos ACB, ACD son iguales, por ser AC perpendicular á BD, sus medidas AB, AD son iguales; y cada uno de estos arcos vale un cuadrante. 9

Todos los ángulos rectos son iguales, porque cada uno vale un cuadrante.

Ángulo *agudo* es el que no llega á recto; ángulo *obtuso* es el que es mayor que el recto.

Ángulos *adyacentes* son los que forma una recta con otra, con la cual concurre en un punto.

Prop. 8.ª *Los ángulos adyacentes suman dos rectos.*

Dem. Sean los ángulos adyacentes FCB, FCD. 10
Desde C describo una circunferencia. Las medidas de los ángulos FCB, FCD son los arcos FB, FD, cuya suma es BFD: pero BFD es media circunferencia, porque el diámetro divide la circunferencia en dos partes iguales: luego la suma de los ángulos adyacentes FCB, FCD vale media circunferencia ó dos rectos.

11 Reciprocamente, si dos ángulos unidos suman dos rectos, sus lados esteriores están en línea recta: es decir, si FCB + FCD = 2 rectos, las líneas CD, CB forman una sola: porque si CB no es prolongacion de CD, lo será CK por egemplo, y la suma de los ángulos adyacentes FCD + FCK = 2 rectos: pero FCD + FCB = 2 rectos: luego FCD + FCK = FCD + FCB: quitando de ámbas partes FCD, es FCK = FCB, el todo = á la parte, lo que es absurdo: luego CK no puede ser prolongacion de CD, ni otra ninguna recta, sino CB: luego &a.

12 Consecuencias. La suma de los ángulos sucesivos, que forman varias rectas hacia una misma parte y en un mismo punto de una recta dada, es = 2 rectos: porque FCB + FCA + ACE + ECD valen tanto como FCB + FCD, esto es, 2 rectos.

La suma de los ángulos sucesivos, que forman varias rectas saliendo de un mismo punto hácia todas partes, es = 4 rectos: porque entre sus lados interceptarán toda la circunferencia.

13 Prop. 9.ª *Los ángulos opuestos al vértice son iguales*: porque ACD + ACB = 2 rectos por adyacentes: ACB + BCE = 2 rectos por adyacentes: luego ACD + ACB = ACB + BCE: quitando ACB de ámbas partes, queda ACD = BCE: luego &a.

Complemento de un ángulo es lo que le falta ó sobra para componer un recto. *Suplemento* de un ángulo es lo que le falta para componer dos rectos.

9. Prop. 10. *La perpendicular es el camino mas corto de un punto á una recta.*

14 Dem. Sea AC perpendicular á DCB: tiro la oblicua AB: digo que AB > AC. Prolongo la AC hasta que CH = AC, y tiro la BH. Doblando la figura por la CB, caerá CA sobre CH, por ser rec-

tos é iguales los ángulos BCA, BCH. El punto A caerá sobre H por ser CA = CH: luego las rectas AB, BH, que coinciden por sus estremos, coincidirán en toda su estension, y serán iguales. Ahora AB + BH > AH, por ser AH línea recta: luego la mitad de AB + BH, que es AB, sera mayor que la mitad de AH, que es la perpendicular AC: luego &a.

Prop. 11. *Las oblicuas que se separan igualmente de la perpendicular son iguales, y tambien los ángulos que forman con las que son perpendiculares.*

Dem. Sea CB = CD: digo que la oblicua AB 15
= AD. Porque doblando la figura por la AC, caerá CB sobre CD por ser iguales los ángulos rectos ACB, ACD: el punto B caerá en D, por el supuesto de ser iguales CB y CD: luego AB caerá sobre AD y serán iguales: luego &a. Respecto que las figuras se ajustan, el ángulo ADC = ABC, y el ángulo DAC = BAC.

Prop. 12. *La oblicua, que se separa mas de la perpendicular, es mayor.*

Dem. Digo que AE es mayor que AB. Prolon- 16
go la perpendicular AC, hasta que CH = AC, y tiro BH y EH. Doblando la figura por la CE, caerá CA sobre CH, por la igualdad de los ángulos rectos ACE, HCE; tambien el punto A caerá sobre H, por ser CA = CH: luego AB coincide con BH, y AE con EH. Ahora, AB + BH < AE + EH, por separarse mas de la recta AH el contorno AEH: luego la mitad de AB + BH, que es AB, es menor que la mitad de AE + EH, que es AE: luego &a.

Reciprocamente, la linea mas corta, que se puede tirar de un punto á una recta, le es perpendicular: pues sino lo fuera, lo seria otra, y esta seria la menor distancia del punto á la recta, contra el supuesto.

Las oblicuas iguales distan igualmente de la perpendicular: pues sino, la que distára mas, seria mayor, contra el supuesto de ser iguales.

La oblicua mayor dista mas de la perpendicular: pues si distára tanto como la menor, serian iguales contra el supuesto; y si distára menos, seria menor que ella, tambien contra el supuesto.

10. Consecuencias. *De un punto á una recta no se le puede bajar mas que una perpendicular*: pues siendo la mas breve distancia del punto á la recta, debe ser única.

La perpendicular mide la distancia de un punto á una recta: pues siendo la mas breve es la mas fácil de medir; y siendo única, no hay con quien equivocarla.

En un punto de una recta no se le puede levantar mas que una perpendicular, que esté en un plano determinado: pues otra cualquiera levantada en el mismo punto, y que estuviese en dicho plano, formaria ángulos desiguales, en el supuesto de ser iguales los que formó la primera, por ser perpendicular.

Desde un punto á una recta no se pueden tirar mas que dos oblicuas iguales; pues la tercera, que se tirase, distaria de la perpendicular mas ó menos que las otras dos, y seria mayor ó menor que ellas.

Prop. 13. *La perpendicular levantada á una recta en su mitad tiene todos sus puntos equidistantes de los estremos de dicha recta.*

17 Dem. Sea CA perpendicular á DB en su mitad: digo que cualquier punto F de la CA equidista

de D y B: pues tirando FD, FB, estas son dos oblicuas iguales, porque distan igualmente de la perpendicular: luego &a.

Prop. 14. *Los puntos que equidistan de los estremos de una recta, están en la perpendicular levantada en su mitad, ó lo que es lo mismo, los puntos, que no están en dicha perpendicular, no pueden equidistar de los estremos de la recta.*

Dem. Sea AC la perpendicular levantada en la mitad de DB: el punto G, que no está en la AC, no puede equidistar de D y B. Tiro GD, GB y FB. BF + FG > GB, por ser GB línea recta: pero FD = FB por oblicuas equidistantes de la perpendicular: luego FD + FG ó DG > GB: luego &a. 18

Si una recta tiene dos puntos equidistantes de otros dos tomados en otra le es perpendicular: pues, tomando por estremos de la segunda los puntos señalados, los dos puntos de la primera deben estar en la perpendicular levantada en la mitad de la segunda: y como por dos puntos solo puede pasar una recta, se infiere que la perpendicular es la misma recta, que tiene dos puntos equidistantes de los estremos de la segunda.

11. *En un punto, tomado en una recta, levantarle una perpendicular.*

Sea el punto dado A: tomo dos porciones iguales AD, AB. Haciendo centro primero en D y luego en B con un mismo radio, describo dos arcos que se corten en H. Tiro la HA, y es perpendicular á DB. Porque tiene dos puntos A y H equidistantes de D y B. El punto H equidista de D y B, porque los radios DH, BH de ámbos arcos son iguales por construccion. 19

Desde un punto dado fuera de una recta, bajarle una perpendicular.

20 Sea F el punto dado y DB la recta. Desde F describo un arco, que corte la recta en los puntos D y B. Desde D y B con un mismo radio describo dos arcos que se corten en H: tiro la FH y será perpendicular á DB. Porque tiene dos puntos F y H equidistantes de D y B: F, por ser centro del arco DB: y H, porque los radios DH, BH de los dos arcos, que se cortan en H, son iguales.

Dividir una recta dada en dos partes iguales.

21 Sea DB la recta dada: desde D y B con iguales radios describo dos arcos que se corten en A, y otros dos que se corten en H; tiro la AH. Esta será perpendicular á la DB en su mitad, pues tiene dos puntos A y H, equidistantes de los estremos D y B, á causa de ser iguales los radios DA, BA, y DH, BH.

4.° *De las paralelas.*

12. *Paralelas* son las rectas, que están en un mismo plano, y que prolongadas indefinidamente, no se encuentran nunca.

Dos rectas perpendiculares á una misma, son paralelas: pues si se encontrasen, desde el punto de concurso habria tiradas dos perpendiculares sobre una misma recta.

Prop. 15. *Si á dos rectas las corta una tercera, formando los ángulos de contraria posicion iguales, dichas dos rectas serán paralelas.*

22 Dem. Sean las rectas BD, AC cortadas por la HG de modo, que los ángulos DFG, AEH sean iguales: digo que BD y AC serán paralelas. Para

demostrarlo, divido la FE por medio en I, tiro la IL perpendicular á BD, tomo LS = LF, tiro la SI, y tiro IR perpendicular á LK. Tenemos que IS = IF por oblicuas equidistantes de la perpendicular IL, y por la misma razon los ángulos IFL, ISL son iguales: pero IFL = IEK por hipótesi: luego ISL = IEK. Tambien por la equidistancia de las oblicuas, el ángulo FIL = LIS: pero FIL = EIK por vérticales: luego LIS = EIK. Doblo la figura por la IK: por ser rectos los ángulos RIL, RIK, caerá IL sobre IK; por ser iguales los ángulos SIL, EIK, caerá IS sobre IE: por ser iguales IS é IE, caerá el punto S sobre E: y por ser iguales los ángulos en S y E, la recta SL caerá sobre EK: luego el punto L caerá sobre K, porque dos rectas no pueden cortarse mas que en un punto. El ángulo en K será igual al ángulo en L, y por tanto será recto: luego las rectas BD, AC serán perpendiculares á una misma LK, y por tanto serán paralelas: luego &a.

Tambien, *si á dos rectas las corta una tercera, formando los ángulos de una misma posicion iguales, las dos rectas serán paralelas.*

Dem. Si el ángulo HFB = HEA, las dos rectas serán paralelas: porque el ángulo HFB = DFG por vérticales: luego DFG = FEA: pero cuando los ángulos de contraria posicion son iguales, las rectas son paralelas: luego &a.

Tambien, *si á dos rectas las corta una tercera, formando la suma de los dos ángulos internos igual á dos rectos, las dos rectas serán paralelas.*

Dem. Si EFB + FEA = 2 rectos, como EFB + EFD = 2 rectos por adyacentes, será EFB + FEA =

EFB + EFD: quitando EFB comun, será FEA = EFD: pero cuando los ángulos de contraria posicion son iguales, las rectas son paralelas: luego &a.

13. Prop. 16. *Por un punto dado no se puede tirar mas que una paralela á una recta dada.*

Este es el célebre postulado de Euclides, cuya demostracion rigorosa no han podido hallar todavía los matemáticos. La proposicion es evidente á primera vista: pues cualquier otra línea que no caiga sobre la primer paralela ha de tomar una direccion diferente de la de ámbas paralelas, y ha de cortarlas por precision. Mas este raciocinio no es una demostracion rigorosa, tal como se pide en Geometría: sino una simple exposicion de lo que nos enseña la experiencia. El siguiente razonamiento es el mas luminoso, que se ha hecho en esta materia.

23 Sea EF la recta dada: por el punto C tírole la perpendicular CD: levanto en C la CB perpendicular á la CD; será paralela á EF, por ser ámbas perpendiculares á la CD. Digo que la CA, que forma ángulo agudo con la CD, se ha de encontrar con la EF. Para demostrarlo, veo cuantas veces cabe el ángulo BCA en el recto BCD, y sea n el número de veces que BCA cabe en BCD. Tomo sobre la CD n número de partes iguales á la CE. (Si n no es número entero, se tomará una mas), y por los puntos de division tiro GH, MN. . . perpendiculares á CD. Habré formado n, número de bandas iguales: porque teniendo las bases iguales, y los ángulos adyacentes á las bases rectos, se podrán sobreponer unas á otras. Ahora el espacio indefinido, comprendido en el ángulo recto BCD, es mayor que el espacio indefinido BCMN;

porque este no se estiende sino por la parte superior, y el otro se estiende por la derecha y por la parte superior: dividiendo uno y otro espacio por n, quedará el espacio angular BCA mayor que la banda BCEF. (Si se tomó una banda mas que n, con mas razon; porque si n. BCA $>$ ($n + 1$) BCEF, será BCA $>$ BCEF $+ \frac{BCEF}{n}$). Pero el espacio ángular BCA no puede ser mayor que la banda BCEF, si la CA no se corta con la EF: luego por el punto C no se puede tirar á la EF mas paralela que la CB.

El defecto de esta demostracion consiste en la comparacion de cantidades indefinidas, que introduce cierta obscuridad en el raciocinio, porque los límites dados de dichas cantidades son diferentes. No seria así, si pudiesen reducirse á ángulos, cuyo vértice estuviese en un mismo punto.

Al ideólogista toca examinar la razon, porque un principio, tan cierto, tan seguro, como los demas de las matemáticas, se ha resistido á los esfuerzos de los mas grandes genios, que se han empeñado en demostrarlo con todo rigor.

Prop. 17. *Si de dos paralelas, la una es perpendicular á una tercer recta, la otra lo será tambien.*

Dem. Sean EF y CB paralelas: si EF es perpendicular á CD, lo será tambien CB: porque sino lo fuese, lo seria otra CA, y esta seria paralela á EF: luego por el pnnto C se podrian tirar dos paralelas á la recta EF, lo que es imposible: luego CA no es perpendicular á CM, ni otra alguna sino la CB: luego &a.

Angulos alternos son los que forma en contrarias posiciones una recta, que corta dos paralelas.

Angulos correspondientes son los que forma en igual posicion una recta, que corta dos paralelas.

Prop. 18. *Si á dos paralelas las corta otra tercer recta, los ángulos alternos serán iguales.*

22 Sean las paralelas BD, AC, y la recta, que las corta, HG: digo que el ángulo EFD = HEA: pues sino, se podria tirar por el punto F una recta que formase un ángulo = FEA, y esta recta seria, por lo ya demostrado, paralela á AC, y por el punto F podrian tirarse dos paralelas á la AC, lo que es imposible: luego el ángulo EFD = HEA: luego &a.

Tambien; *si á dos paralelas las corta otra tercer recta, los ángulos correspondientes serán iguales*: porque el ángulo EFD = AEF por alternos; pero EFD = BFH por vérticales: luego HFB = HEA: luego &a.

Tambien, *si á dos paralelas las corta otra tercer recta, la suma de los ángulos interiores será igual á dos rectos*: porque BFE + BFH = 2 rectos por adyacentes: pero BFH = AEF por correspondientes: luego BFE + AEF = 2 rectos: luego &a.

24 14. Consecuencias. 1.ª *Dos rectas, paralelas á una tercera, son paralelas entre sí*: porque sea AC paralela á BD, y BD paralela á EF: tiro KI perpendicular á AC: lo será á su paralela BD; y por serlo á esta, lo será á su paralela EF: luego AC y EF, perpendiculares á KI, son paralelas entre sí: luego &a.

2.ª *Los ángulos, cuyos lados son paralelos y están en una misma direccion, son iguales.*

25 Dem. Sean los dos ángulos BAC, FED: por ser AB y EF paralelas, los ángulos correspondien-

tes BAC, FGC son iguales: por la misma razon FGC = FED: luego BAC = FED: luego &ca.

3.ª Los puntos de una recta equidistan de su paralela.

Dem. Sean AB y CD paralelas: tiro desde dos puntos de la primera A y B las perpendiculares AC y BD sobre CD: digo que AC = BD. Para demostrarlo, divido CD por medio en F, y tiro FE perpendicular á CD: estas tres rectas, perpendiculares á CD, lo serán á su paralela AB. Doblo la figura por la EF: caerá FC sobre FD y EA sobre EB, por la igualdad de los ángulos rectos: caerá el pùnto C sobre D, por ser FC = FD: caerá CA sobre DB, por la igualdad de los ángulos rectos en C y D: luego el punto A, concurso de AE y AC, caerá sobre B, concurso de BE y BD, y será AC = BD: luego &ca. 26

Problema. *Por un punto, dado fuera de una recta, tirarle una paralela.*

Sea CD la recta, y B el punto dado. Tiro desde él la BC á cualquier punto de la CD: formo en B el ángulo CBA = BCD, y será BA paralela á CD, porque los ángulos de contraria posicion BCD, CBA son iguales. 27

5.° *De las rectas tiradas en el circulo.*

15. Prop. 19. *El radio perpendicular á una cuerda, la divide á ella y á su arco en dos partes iguales.* 28

Dem. Sea el radio CD perpendicular á la cuerda AB: tiro los radios CA, CB, que serán dos oblicuas iguales: luego se separan igualmente de la perpendicular: luego EA = EB. Siendo la CD perpendicular á AB en su mitad, todos los puntos de la CD equidistan de A y B: luego las cuerdas DA y DB son iguales, y por consiguiente sus arcos, &a.

La línea, que satisfaga á dos de estas cuatro condiciones, pasar por el centro, pasar por la mitad de una cuerda, pasar por la mitad de su arco y ser perpendicular á dicha cuerda, ha de satisfacer á las otras dos: porque con dos de estas condiciones queda determinada dicha perpendicular, que por lo demostrado debe satisfacer á todas cuatro.

Para dividir un arco ó un ángulo en dos partes iguales, se bajará desde el vértice una perpendicular sobre la cuerda del arco. Dividiendo cada mitad en dos partes iguales, quedará dividido el arco en 4 partes iguales. Del mismo modo se podrá dividir un arco en 8, 16, &a. y en general, en el número de partes iguales, que indique cualquier potencia del 2.

29 16. Problema. *Por tres puntos dados hacer pasar una circunferencia.*

Sean dichos puntos A, B, D. Tiro las rectas AB, BD. En sus mitades E F, levántoles las perpendiculares EH, FK. Solamente los puntos de la EH equidistan de A y B: solamente los puntos de la FK equidistan de B y D: luego el punto C de concurso de ámbas perpendiculares es el único, que equidista de A, B, D: haciendo centro en C con el radio CA describo la única circunferencia, que puede pasar por los puntos A, B, D.

Á la verdad, estas dos perpendiculares no se encontrarán, si los tres puntos están en línea recta;

pues dos rectas, perpendiculares á una misma, son paralelas entre sí: pero si las dos rectas AB, BD no forman una sola, las perpendiculares EH, FK se han de encontrar: pues si fuesen paralelas, por ser BK perpendicular á EH, lo seria á KF, y desde el punto B podrian bajarse sobre FK dos perpendiculares BF, BK, lo que es absurdo.

17. Consecuencias. 1.ª *Tres puntos, que no están en línea recta, determinan la posicion de un círculo*: pues por dichos tres puntos solo puede pasar una circunferencia.

2.ª *Dos círculos solo se pueden cortar en dos puntos*: pues si se cortasen en tres puntos, coincidirian.

3.ª *Una recta no puede cortar á un círculo mas que en dos puntos*: pues si lo cortase en tres, pasaria una circunferencia por tres puntos, que estuviesen en línea recta, contra lo demostrado.

4.ª *Dado un círculo, ó un arco, se puede buscar su centro*, tomando en él tres puntos, tirando dos cuerdas, y levantando dos perpendiculares en sus mitades: el punto de concurso de estas dos perpendiculares será el centro buscado.

18. *Tangente* al círculo es una recta, que solo tiene un punto comun con la circunferencia.

Prop. 20. *El radio tirado al punto de contacto es perpendicular á la tangente.*

Dem. Sea TG la tangente: tendrá todos sus pun- 30
tos fuera del círculo, excepto el del contacto F: luego el punto F es el mas próximo que tiene al centro: pero la línea mas corta, tirada desde un punto á una recta, es perpendicular á ella: luego CF, menor que cualquier otra recta CG tirada desde el centro á la tangente, es perpendicular á la tangente: luego &a.

Reciprocamente, la perpendicular al radio en su estremo, es tangente al círculo: porque si CF es perpendicular á TG, es la línea mas corta que se puede tirar del centro á la TG: luego todos los demas puntos de la TG distan del centro mas que el punto F: luego la TG no tiene mas punto comun con la circunferencia, que el punto F: luego es tangente: luego &ca.

Es fácil, pues, tirar una tangente á un punto dado de la circunferencia; tirando un radio á aquel punto, y levántandole en él una perpendicular.

Por un punto dado en la circunferencia solo se le puede tirar una tangente: pues al radio tirado á aquel punto solo se le pnede levantar en él una perpendicular.

31 19. Prop. 21. *Los arcos comprendidos entre rectas paralelas son iguales.*

Dem. Si las rectas son dos cuerdas DE, AB, fuera de las cuales está el centro, tirando el radio CF, perpendicular á la una, lo será á la otra; y dividirá por medio sus arcos: luego el arco $FDA = FEB$, y $FD = FE$: restando, queda $DA = EB$.

Si las rectas son dos cuerdas DE, D′E′, entre las cuales está el centro, tiro el diámetro FF′ perpendicular á la una y lo será á la otra: dividirá sus arcos por mitad, y será $DF = FE$, $D'F' = F'E'$: sumando estas dos ecuaciones, y restando de las semicircunferencias iguales FD′F′, FE′F′, queda $DD' = EE'$.

Si las rectas son la tangente TG y la cuerda DE, fuera de las cuales está el centro, tirando el diámetro FF′ al punto de contacto, será perpendicular á la tangente, y por consiguiente á la cuerda, que le es paralela, y dividirá por medio su arco: luego $FD = FE$.

Últimamente, si las rectas son la tangente TG y la cuerda $D'E'$, entre las cuales está el centro, tirando el diámetro FF' al punto de contacto, será perpendicular á la tangente, y por tanto á la cuerda, y dividirá por medio su arco: luego $D'F' = F'E'$: Restando de las semicircunferencias $FD'F'$, $FE'F'$, queda $FD' = FE'$: luego &a.

6.° *Intersecciones de los círculos.*

---

20. Prop. 22. *Si dos circunferencias tienen un punto comun fuera de la recta, que une sus centros, tendrán otro punto comun.*

Dem. Córtense en M las circunferencias C y C'. 32
Tírese MI perpendicular á CC', y prolónguese hasta que IN sea $= IM$. Las oblicuas CM, CN, equidistantes de la perpendicular CI, son iguales, y por tanto N es un punto de la circunferencia C. Del mismo modo se demostrará que es punto de la circunferencia C': luego es comun á ámbas: luego &a.

Si dos circunferencias se cortan en dos puntos, la línea que une sus centros ha de ser perpendicular á la cuerda comun: porque ha de tener dos puntos, que son los centros, equidistantes de los estremos de dicha cuerda.

Prop. 23. *Si dos círculos se cortan en dos puntos, la distancia de sus centros ha de ser menor que la suma de sus radios, y mayor que su diferencia*: porque sea D la distancia de los centros, y R y r los radios de ámbos círculos: por ser D línea recta, será $D < R + r$. Tambien, por ser R línea recta, será $D + r > R$, ó quitando r de ámbos miembros, será $D > R - r$: luego &a.

Si no tienen mas de un punto comun, este ha de estar en la recta, que une sus centros: pues si estuviera fuera de ella, habria otro punto comun á ámbas circunferencias.

33 Si dos círculos se tocan interiormente, $D = R - r$. Basta ver la figura, para inferir que $CC'' = CA - C''A$.

Si se tocan exteriormente, $D = R + r$: en efecto $CC' = CA + C'A$.

34 Si no tienen ningun punto comun, y está el uno dentro del otro, $D < R - r$: pues $CD = DO - CA - AO$: luego CD es menor que $DO - CA$.

Si no tienen ningun punto comun, y está el uno fuera del otro, $D > R + r$: pues $DC' = DO + C'B + BO$.

Verificada cualquiera de estas condiciones, se ha de verificar la propiedad que le corresponde: porque hemos examinado todos los casos posibles en la interseccion y tangencia de los círculos: y como cada condicion excluye las de los demas casos, menos la del suyo propio, verificada la condicion, se verificará dicho caso. Por egemplo, si la distancia de los centros es igual á la suma de sus radios, los círculos se tocarán exteriormente: lo demuestro así: si se cortasen, será $D < R + r$ contra el supuesto. Si se tocasen interiormente, seria $D = R - r$, y no $= R + r$. Si fuesen interiores, seria $D < R - r$ contra el supuesto. Si fuesen esteriores, seria $D > R + r$ contra el supuesto: luego es preciso que se toquen exteriormente.

La tangente tirada á un círculo en su punto de contacto con otro, es tambien tangente á este segundo círculo: porque debiendo estar el punto de contacto en la línea, que une los centros, dicha tangente debe ser perpendicular á esta línea y por tanto al radio del otro círculo, y tangente á él.

21. Problema. *Por un punto dado hacer pasar una circunferencia, que toque á otra dada en un punto tambien dado.* 35

Sea la circunferencia dada C′, y los puntos A y B. Tiro en A la AT tangente al círculo C′: deberá serlo al círculo pedido; el centro de este deberá estar en la prolongacion del radio C′A. Como AB debe ser cuerda del círculo pedido, la perpendicular EF en su mitad deberá pasar por el centro del círculo pedido: este estará en C. Con el radio CA describo el círculo pedido desde C.

Dado un círculo y una recta, describir otro círculo, que toque al dado, que tenga su centro en dicha recta y que pase por un punto dado de la misma.

Sea el círculo dado C, la recta dada AO, y A el punto de ella, por donde debe pasar la circunferencia que se pide. Tomo AR igual al radio del círculo dado. Tiro la CR, y en su mitad P levántole la perpendicular PT: su encuentro con la AO determina el centro del círculo pedido. Porque equidistando de R y C todos los puntos de la PT, perpendicular en la mitad de RC, será TR = TC: quitando de ámbos miembros AR = MC por construccion, será TA = TM: luego el círculo descrito desde T con el radio TA pasará por M; y como la distancia de los centros TC = CM + MT, suma de los radios, dichos círculos se tocan esteriormente. 36

Conocida la distancia de los centros de dos círculos y sus radios, se podrá saber si son interiores ó esteriores, ó si se tocan interior ó esteriormente, ó si se cortan, examinando cual de las fórmulas siguientes verifican los datos.

$D < R - r.$

$D > R + r.$

$D = R - r.$

$D = R + r.$

$D < R + r$ y $> R - r.$

7.° De los triángulos.

---

22. *Triángulo* es el espacio encerrado por tres rectas. *Lados del triángulo* son las rectas que lo forman. El triángulo es *escaleno*, si sus tres lados son desiguales: *isósceles*, si dos de ellos son iguales: *equilátero*, si sus tres lados son iguales: *rectángulo*, si tiene un ángulo recto: *obtusángulo*, si tiene un ángulo obtuso: *acutángulo*, si sus tres ángulos son agudos,

Hipotenusa de un triángulo rectángulo es el lado opuesto al ángulo recto. *Base* es cualquiera de los lados del triángulo, sobre el cual se considera formado. *Vértice* del triángulo es el vértice del ángulo opuesto á la base. *Altura* del triángulo es la perpendicular tirada desde su vértice á su base.

23. Prop. 24. *El ángulo externo, que se forma prolongando un lado de un triángulo, es igual á la suma de los dos ángulos internos opuestos.*

37 Dem. Sea el triángulo ABC, prolónguese el lado AC y tirese CD paralela á AB. El ángulo BCD = B por alternos: el ángulo DCK = A por

correspondientes: pero el ángulo esterno BCK = BCD + DCK: luego tambien es = B + A: luego &a.

Prop. 25. *La suma de los tres ángulos de un triángulo es = á dos rectos.*

Dem. Sea el triángulo ABC: prolongando el lado AC, el ángulo externo BCK = B + A: pero BCK + BCA = 2 rectos: luego B + A + BCA = 2 rectos: luego &a.

24. Consecuencias. *1.ª Si dos ángulos de un triángulo son iguales á dos de otro, el tercero será igual al tercero*: pues es lo que falta á la suma de los dos ángulos iguales para componer dos rectos.

2.ª En un triángulo, que tiene un ángulo recto ú obtuso, los otros dos deben ser agudos: pues si alguno de ellos fuese recto ú obtuso, entre los tres compondrian mas de dos rectos.

3.ª En el triángulo rectángulo los dos ángulos agudos deben sumar un recto, y será el uno complemento del otro.

4.ª Si son agudos los ángulos de la base de 38
un triángulo, la altura debe caer dentro del triángulo: pues si cayese fuera, como BA en el triángulo BC'C, habria un ángulo recto A y un obtuso BC'A, que lo seria por ser suplemento del agudo BC'C.

5.ª Si los ángulos sobre la base son, el uno agudo y el otro obtuso, la perpendicular debe caer fuera del triángulo: pues si cayese dentro, el triángulo parcial formado hácia la parte donde está el ángulo obtuso, tendria un ángulo recto y otro obtuso.

25. Prop. 26. *Dos triángulos son iguales, cuando tienen dos lados iguales y el ángulo comprendido igual.*

39 Dem. En los triángulos ABC, A'B'C', sea el lado AB = A'B', AC = A'C' y el ángulo A = A'. Háganse coincidir estos dos ángulos, que son iguales: caerá el lado A'B' sobre AB, y como son iguales, coincidirá el punto B' con B. Tambien caerá A'C' sobre AC, y como son iguales, el punto C' caerá sobre C. El lado B'C', que se ajusta en dos puntos con BC, coincidirá con él en toda su estension: luego los dos triángulos coinciden: luego son iguales: luego &a.

Prop. 27. *Dos triángulos son iguales, cuando tienen un lado igual y dos ángulos iguales.*

Dem. Teniendo dos ángulos iguales, el tercer ángulo será tambien igual. Sea el lado igual AB = A'B'. Háganse coincidir estos dos lados iguales: por ser el ángulo A' = A, caerá el lado A'C' sobre AC; y por ser el ángulo B = B', el lado B'C' caerá sobre BC; como dos rectas no tienen mas que un punto de concurso, el punto C', donde se encuentran A'C', B'C', caerá sobre C, encuentro de AC y BC: luego los dos triángulos coinciden y son iguales: luego &a.

26. Prop. 28. *Si dos triángulos tienen dos lados iguales, el que tenga mayor el ángulo comprendido, tendrá mayor el tercer lado.*

40 Dem. Sean los dos triángulos ABC, ABC'; cuyo lado comun es AB, BC = BC' y el ángulo ABC mayor que ABC'. Colocando el triángulo ABC' sobre ABC, de modo que los lados iguales AB se ajusten, por ser el ángulo ABC mayor que ABC', el lado BC' vendrá por dentro del triángulo ABC, y el vértice C' ó caerá en la base AC, ó fuera del triángulo ABC, ó dentro de él.

Si cae el punto C' en la base, el tercer lado AC' es visiblemente menor que AC.

Si cae fuera, tendremos $AI + IC' > AC'$ por ser AC' línea recta, y por la misma razon $BI + IC > BC$: sumando estas desigualdades, será $AC + BC' > AC' + BC$. Quitando de ámbas partes $BC = BC'$ por la hipótesi, será el tercer lado $AC > AC'$. 41

Si el vértice C' cae dentro del triángulo, el camino $AC + CB > AC' + BC'$, por separarse mas de la línea recta: quitando $BC = BC'$, será $AC > AC'$: luego &a. 42

Prop. 29. *Si dos triángulos tienen dos lados iguales, el que tenga mayor el tercer lado, tendrá mayor el ángulo que se le opone.*

Dem. Sea AB comun, $BC = BC'$, y $AC > AC'$. 41
Si el ángulo ABC fuese $= ABC'$, los dos triángulos, teniendo dos lados y el ángulo comprendido igual, serian iguales, y el lado $AC = AC'$, contra la hipótesi. Si el ABC fuese menor que ABC', seria el lado $AC < AC'$, tambien contra la hipótesi: luego el ángulo ABC, que no puede ser igual ni menor que ABC', será mayor que él: luego &a.

27. Prop. 30. *Dos triángulos son iguales, cuando tienen sus tres lados iguales.*

Dem. Sea $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$. 39
El ángulo A es igual A': pues si fuese menor, siendo iguales los lados que los comprenden, seria el lado BC menor que $B'C'$ contra la hipótesi, y si el ángulo A fuese mayor que A', el lado BC seria mayor que $B'C'$, tambien contra la hipótesi: luego el ángulo $A = A'$, y los dos triángulos, teniendo dos lados y el ángulo comprendido igual, son iguales: luego &a.

28. Problemas. 1.° *Dados dos ángulos de un triángulo, hallar el tercero.*

En el punto O de una recta KN, formo los 43 ángulos MON, MOL, iguales respectivamente á los dos ángulos dados: y el ángulo LOK, que completa los dos rectos, es el tercer ángulo pedido: pues la suma de los tres ángulos del triángulo vale dos rectos.

2.° *Dado un ángulo y los lados, que lo comprenden, construir el triángulo.*

44 Sea K el ángulo dado, y m y n los lados, que lo deben comprender. Formo el ángulo $A = K$; tomo $AB = m$, y $AC = n$; y tirando la BC, el triángulo ABC será el pedido.

3.° *Dados un lado y dos ángulos, construir el triángulo.*

45 Busco el tercer ángulo: Sea n el lado dado, y k y l los ángulos adyacentes á él. Tiro la recta $AB = n$, y formo en A un ángulo $= k$ y en B un ángulo $= l$, y el triángulo ABC será el pedido.

4.° *Construir un triángulo, dados sus tres lados.*

32 Sean m, n, p los tres lados. Tomo $CC' = m$, y haciendo centro en C con un radio $= n$ y en C′ con un radio $= p$, describo dos círculos. Desde su punto de encuentro M, tiro las MC y MC′; y como estas son respectivamente iguales á n y á p, el triángulo MCC′ será el pedido. El problema será imposible, á no ser que se verifiquen estas dos condiciones, que m sea $< n + p$, y $> n - p$: pues para que se corten dos círculos es necesario que la distancia de los centros sea menor que la suma de sus radios, y mayor que su diferencia.

5.° *Dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, construir el triángulo.*

46 Sea K el ángulo dado, a su lado opuesto y c su lado adyacente. Formo el ángulo $A = K$. To-

mo AB $=c$: y desde B con un radio $=a$ describo un círculo que cortará la AC en los puntos C y C′: tirando BC y BC′, los triángulos ABC, ABC′ satisfarán á la cuestion. En este problema pueden ocurrir varios casos.

1.° Si a es menor que c, pero mayor que la perpendicular BD, resultarán los dos triángulos ya dichos.

2.° Si a es mayor que c, entónces el 2.° punto C′ en que el círculo corta la CA, está á la derecha de A: pues la oblicua menor BA debe distar menos de la perpendicular. Entónces el triángulo ABC es el único que satisface á la cuestion.

3.° Si a es menor que la perpendicular BD, el problema es imposible: pues el arco descrito desde B no llegará á la base.

4.° Si $a=$ BD, el arco será tangente á CA en D, y el problema quedará resuelto por el triángulo rectángulo BDA.

6.° *Construir un triángulo rectángulo, dada la hipótenusa y un lado.*

Fórmese el ángulo recto A. Tomese AC igual 47
al lado conocido. Hágase centro en C con un radio igual á la hipotenusa, y al punto B, donde el arco corte la base, tiro la CB: el triángulo CAB es el pedido.

Dos triángulos rectángulos, que tengan la hipotenusa y un lado igual, son iguales: pues estos datos bastan para construir y determinar el triángulo.

En general, dos triángulos son iguales, cuando tienen dos lados iguales, el ángulo opuesto á uno de ellos igual, y ámbos triángulos son de una misma especie, es decir, rectángulos, obtusángulos ó acutángulos: pues con los dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos se puede determinar el triángulo, con tal que se conozca su especie.

Son cuatro, pues, los casos, en que se puede conocer la total igualdad de dos triángulos, conocida la igualdad de algunas de sus partes: 1.° cuando sus lados son iguales: 2.° cuando son iguales dos lados y el ángulo comprendido: 3.° cuando son iguales dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, y son ámbos triángulos de una misma especie: 4.° cuando tienen un lado igual y dos ángulos iguales y semejantemente colocados.

7.° Inscribir un círculo en un triángulo dado.

48 Sea el triángulo dado ABC. Divido los ángulos en A y en C en dos partes iguales con las rectas AO, CO: el punto donde concurran será el centro. Bajando desde él las perpendiculares OD, OE, OF sobre los lados, estas perpendiculares serán iguales, y una de ellas será el radio del círculo inscripto.

Dem. Los triángulos AOE, AOF tienen AO comun, el ángulo E = F por rectos, y los ángulos en A iguales por construccion: luego son iguales y OE = OF. Del mismo modo se demuestra que OE = OD: luego las tres perpendiculares OD, OF, OE son iguales: y haciendo centro en O con el radio OF, el círculo descrito pasará por D y E, y las rectas CA, CB, AB, perpendiculares á los radios en sus estremos, serán tangentes á dicho círculo; y por tanto el círculo estará inscripto en el triángulo.

Los triángulos iguales AOE, AOF dán tambien AE = AF, y así mismo ha de ser BF = BD, CD CE. Luego BC — AC = BD — AE = BF — AF, y siendo por otra parte AB = BF + AF, será AF

$= \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$, $BF = \frac{1}{2}(BC + AB - AC)$. Del mismo modo se probaria que $CD = \frac{1}{2}(AC + BC - AB)$.

29. Prop. 31. *En el triángulo isósceles, los ángulos opuestos á los lados iguales, son iguales.*

Dem. Tiro desde el vértice la recta CD á la 49
mitad de la base. Los triángulos ACD, CDB tienen el lado CD comun, $CA = CB$ por hipótesi, y $AD = DB$ por construccion: luego, teniendo sus lados iguales, son iguales, y el ángulo $A = B$: luego &a.

Prop. 32. *En todo triángulo á ángulos iguales se oponen lados iguales.*

Dem. Si el ángulo $A = CBA$, los lados AC, 50
CB son iguales: pues sino, alguno de ellos, como CA, seria mayor que el otro: y tomando $AE = CB$, y tirando la EB, los triángulos AEB, ACB, que tienen AB comun, $AE = BC$ por construccion, y los ángulos comprendidos A y CBA iguales por hipótesi, serán iguales, lo que no puede ser, porque la parte no puede ser igual al todo: luego $AC = CB$: luego &a.

En el triángulo equilátero los tres ángulos son iguales, porque se oponen á lados iguales, y cada ángulo vale un tercio de dos rectos ó $\frac{2}{3}$ de un recto.

Prop. 33. *La altura del triángulo isósceles divide á su base y á su ángulo vértical en dos partes iguales.*

Dem. Tirada la altura CD, los triángulos ACD, 49
CDB tienen $AC = CB$ por hipótesi, los ángulos en D iguales por rectos, y el ángulo $A = B$ por oponerse á lados iguales: luego son iguales: luego $AD = DB$, y $ACD = DCB$: luego &a.

30. Prop. 34. *Las partes de dos paralélas,*

interceptadas entre otras dos paralelas, son iguales.

51 Dem. Sean AB y CD paralelas, y BD y AC paralelas. Tirada la AD, los triángulos ADB, ADC, que tienen AD comun, el ángulo BAD = ADC por alternos, y el ángulo BDA = DAC por alternos, son iguales: luego BA = DC, y BD = AC: luego &ca.

Prop. 35. *Si á dos rectas iguales las unen otras dos iguales, cada una será paralela á su opuesta.*

Dem. Sea AB = CD, y BD = AC: tirada la AD, los triángulos ABD, ADC, que tienen AB = CD, AC = BD y el lado AD comun, son iguales: luego el ángulo BAD = ADC, y siendo alternos, las rectas BA, DC son paralelas: tambien el ángulo BDA = DAC, y siendo alternos, las rectas BD, AC son paralelas: luego &ca.

Prop. 36. *Si dos rectas son iguales y paralelas, las rectas que las unan, serán tambien paralelas é iguales.*

Dem. Sea AB igual y paralela á CD. Tirada la AD, los triángulos BAD, DAC, que tienen AD comun, el lado AB = DC por la hipótesi, y los ángulos BAD, ADC iguales por alternos, serán iguales: luego BD = AC, y el ángulo BDA = DAC, y siendo alternos, las rectas BD, AC serán paralelas: luego &ca.

31. Prop. 37. *En todo triángulo al mayor ángulo se opone el mayor lado.*

52 Dem. Sea el ángulo BAC > C. Tiro la AD que forme el ángulo DAC = C. En el triángulo DAC, será DA = DC, por oponerse á ángulos iguales: pero AD + DB > AB, por ser AB línea recta, luego CD + DB ó CB > BA: luego &ca.

En todo triángulo al mayor lado se opone el mayor ángulo.

Dem. Sea el lado BC > BA: el ángulo BAC no puede ser = C, porque entónces los lados BC y BA, opuestos á ángulos iguales, serian iguales contra la hipótesi. Tampoco el ángulo BAC < C: pues el lado BC seria < BA, por oponerse al menor lado: luego, si el ángulo BAC ni es igual, ni es menor que C, es mayor que C: luego &a.

32. Prop. 38. *Dos cuerdas iguales equidistan del centro.*

Dem. Sean iguales las cuerdas AE, CD: bájoles desde el centro las perpendiculares OL, OI, y tiro los radios OD, OA. Los triángulos ODL, OAI, que tienen DL = AI por mitades de cuerdas iguales, OD = OA por radios, y son rectángulos, son iguales: luego OL = OI: luego &a. 53

Dos cuerdas equidistantes del centro son iguales.

Dem. Si OL = OI, tirando los radios OD, OA, los triángulos OAI, OLD; que tienen OD = OA por radios, OL = OI por hipótesi y son rectángulos, serán iguales, y será AI = DL: pero estas son mitades de las cuerdas: luego las cuerdas son iguales: luego &a.

Prop. 39. *La cuerda mayor dista menos del centro.*

Dem. Sea AB mayor que CD: será el arco AB mayor que CD: tomo sobre el arco AB, AE = CD, y tiro la cuerda AE: siendo iguales los arcos AE, CD, sus cuerdas serán iguales y equidistarán del centro: luego OL = OI: pero OI es mayor que OG, y OG, oblicua con respecto á la AB, es mayor que la perpendicular OK: luego OL > OK: luego &a, 54

Prop. 40. *La cuerda, que dista menos del centro, es mayor.*

Dem. Sea OK < OL. Si la cuerda AB fuese = CD, equidistarian del centro contra la hipótesi. Si AB fuese < CD, distaria mas del centro contra la hipótesi: luego AB, que no es igual, ni menor que CD, es mayor que ella: luego &a.

8.° Medida de los ángulos en el circulo.

---

33. Llámase *inscripto en el circulo* el ángulo, cuyo vértice está en la circunferencia, y cuyos lados son cuerdas del círculo.

Prop. 41. *La medida del ángulo inscripto es la mitad del arco sobre que insiste.*

Dem. O uno de los lados pasa por el centro, ó el centro está entre los lados, ó fuera de ellos.

55 Sea el ángulo inscripto GAD, cuyo lado AD pasa por el centro. Tiro el diámetro EF, paralelo á AG. Los ángulos GAD, ECD son iguales por correspondientes: pero el arco ED es medida del angulo DCE; luego tambien lo es de DAG. El arco ED = FA, por medidas de los ángulos DCE, ACF iguales por vérticales: pero AF = EG por comprendidos entre paralelas: luego DE = EG: luego DE es mitad de DG: luego el ángulo GAD tiene por medida la mitad del arco DG.

56 Sea el ángulo BAG, que tiene el centro entre sus lados: tiro el diámetro AD. El ángulo BAD, que tiene el centro en su lado AD, tiene por medida la mitad del arco BD. El ángulo GAD por la misma razon tiene por medida la mitad del arco DG: luego el ángulo BAG, suma de los dos, tiene por medida $\frac{1}{2}$BD + $\frac{1}{2}$DG, ó $\frac{1}{2}$BG.

Sea el ángulo HAB, que tiene el centro fuera de sus lados. Tiro el diámetro AD. La medida del ángulo HAD, que tiene el centro en su lado AD, es $\frac{1}{2}$HD: la del ángulo BAD por la misma razon es $\frac{1}{2}$BD: luego la del ángulo HAB, diferencia de los dos es $\frac{1}{2}$HD — $\frac{1}{2}$BD, ó $\frac{1}{2}$HB: luego &a. 57

34. Consecuencias. 1.ª Se llama *ángulo del segmento* el que está formado por una tangente y una cuerda tirada al punto de contacto. Su medida es la mitad del arco que subtende la cuerda. Porque sea TAD el ángulo del segmento. Tiro el diámetro AD. La medida del ángulo recto TAD es la mitad de la semicircunferencia ABD. La medida del ángulo inscripto BAD es $\frac{1}{2}$BD: luego la del ángulo TAB, diferencia de los dos, es $\frac{1}{2}$ABD — $\frac{1}{2}$BD, ó $\frac{1}{2}$AB: luego &a. 58

2.ª El ángulo inscripto en el semicírculo es recto: pues su medida será la mitad de la semicircunferencia. El ángulo inscripto sobre un arco, mayor que la semicircunferencia, es obtuso: pues su medida será mayor que la mitad de la semicircunferencia. El ángulo inscripto sobre un arco, menor que la semicircunferencia, es agudo: pues su medida será menor que la mitad de la semicircunferencia.

3.ª Los ángulos inscriptos, que insisten sobre un mismo arco, son iguales: pues todos tienen por medida la mitad de dicho arco.

4.ª El ángulo inscripto es la mitad del central, cuando ambos insisten sobre un mismo arco: pues el inscripto tiene por medida la mitad del arco, y el central todo el arco.

35. Problemas. 1.° *Levantar una perpendicular en el estremo de una recta sin prolongarla.* 59

Sea A el punto donde se quiere levantar una perpendicular á la AB. Desde un punto cualquiera C hago centro con el radio CA, y describo un círculo que cortará á AB en A y en B. Tiro el diámetro BD, y por su estremo D la cuerda DA, que será perpendicular á AB; porque el ángulo DAB inscripto en el semicírculo es recto.

2.° *Desde un punto, dado fuera de un círculo, tirarle una tangente.*

60 Sea C el círculo, y D el punto dado. Desde D al centro del círculo tiro la DC: y haciendo centro en su punto medio con un radio igual á su mitad, describo un círculo, que cortará al dado n los puntos B y A: tirando á ellos las rectas)B, DA, estas serán tangentes al círculo C: porque tirando los radios CA, CB, los ángulos DBC, DAC, que insisten sobre el diámetro DC, serán rectos; luego las rectas DB, DA son perpendiculares á los radios CB, CA en sus estremos: luego serán tangentes al círculo C.

3.° *Sobre una recta dada construir un arco de círculo tal, que cualquier ángulo inscripto en él sea igual á un ángulo dado.*

61 Sea BE la recta dada, y A el ángulo dado. Formo en el punto E el ángulo BEK = A. En la mitad de BE, levántole la perpendicular GC: en el punto E levanto la EC perpendicular á EK. En el punto C de concurso de estas dos perpendiculares hago centro, y con el radio CE describo un círculo que pasará por B, porque el punto C, que está en la CG, perpendicular á BG en su mitad, debe equidistar de los estremos de la BE: luego el círculo, que pasa por E, debe pasar por B. Tambien la EK debe ser tangente á el círculo, por ser perpendicular al radio CE en su estremo.

Sentado esto, digo que cualquier ángulo inscripto en el arco BE, como BOE, es igual al ángulo A.

Dem. El ángulo BOE tiene por medida la mitad del arco BE por ser inscripto: pero el ángulo BEK, por ser del segmento, tiene por medida la mitad del mismo arco: luego los ángulos BOE, BEK son iguales: pero BEK $=$ A por construccion: luego BOE $=$ A: luego &a.

4.° *Dados tres puntos, determinar un cuarto punto, conocidos los ángulos, que forman las lineas tiradas desde el 4.° punto á los otros tres.*

Sean los tres puntos A, B, C: y los ángulos dados AC′B, BC′C. Construyo sobre AB un arco ca- 41
paz del ángulo AC′B: sobre BC un arco capaz del ángulo BC′C: el punto de concurso de estos dos arcos será el 4.° punto. Pues tirando desde él rectas á los otros tres, los ángulos que estas rectas formen, inscriptos en los arcos construidos, deben ser iguales á los ángulos dados, y por tanto dicho punto de concurso satisface á la condicion del problema.

5.° *Construir un triángulo, dada su base, su altura y su ángulo vértical.*

Sea b la base, h la altura, A el ángulo vérti- 62
cal. Sobre la base BE $= b$ construyo un arco capaz del ángulo dado A. Levanto GH perpendicular á la base, é igual á h. Por su estremo H tiro DD′ paralela á la base, que cortará la circunferencia en D y D′. Tirando DB, DE, D′B, D′E, los triángulos BDE, BD′E satisfarán á la condicion pedida: pues tienen la base b, la altura h, y los ángulos vérticales D y D′, por inscriptos en un arco capaz del ángulo A, serán iguales á dicho ángulo A. Estos dos triángulos son iguales, por

tener el lado BE comun, el ángulo D = D′ y el ángulo DEB = D′BE por insistir sobre iguales arcos DB, D′E.

9.° *Lineas proporcionales y triángulos semejantes.*

---

*36. Prop. 42. *Si sobre una recta se toman partes iguales, y por los puntos de division se tiran rectas paralelas entre sí, que terminen en otra recta cualquiera, interceptarán en esta partes iguales.*

63 Dem. Sobre la recta AH tomense las partes iguales AB, BC, CD, DE, y tirense las paralelas Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, que terminen en la ah: digo que las partes ab, bc, cd, de serán iguales. Para demostrarlo, por los puntos a, b, c, d tiro ai, bl, cm.... paralelas á AH. Como ai = AB, bl = BC, cm = CD por paralelas entre paralelas, siendo AB = BC = CD, será $ai = bl = cm$; y los triángulos aib blc, cmd.... tienen un lado igual, los ángulos en a, b, c iguales por correspondientes, y los ángulos en b, c, d iguales por correspondientes: luego son iguales: luego $ab = bc = cd$: luego &a.

Prop. 43 *Si tres paralelas cortan á dos rectas, las cortan en partes proporcionales.*

64 Dem. Si á las rectas AH, ah las cortan las paralelas Aa, Ee, Hh, será $\frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{EA}} = \frac{eh}{ea}$ ó componiendo $\frac{\mathrm{HA}}{\mathrm{EA}} = \frac{ha}{ea}$. Puede suceder que las partes EH, EA sean conmensurables ó inconmensurables entre sí.

Si son conmensurables, tendrán una medida comun, que cabrá un número exacto de veces en EH y en EA, y tirando por los puntos de division paralelas á Aa, interceptarán en la ah partes iguales, de las cuales habrá tantas en he y ea, como veces cabe en EH y EA su medida comun: luego la razon de he á ea será la misma, que de HE á EA.

Si son inconmensurables, dividiendo la EA en cualquier número de partes iguales, y llevando una de ellas sobre la EH, ningun punto de division podrá caer en H, pues serian en este caso conmensurables las EH, EA. Sea, pues, I el punto de division mas cercano á H: tiro Ii paralela á Aa, y como AE y EI son conmensurables, tendremos $\frac{\mathrm{EI}}{\mathrm{EA}} = \frac{ei}{ea}$. Pongo por EI su igual EH — HI, y por ei, eh — hi, y será $\frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{EA}} - \frac{\mathrm{HI}}{\mathrm{EA}} = \frac{eh}{ea} - \frac{hi}{ea}$. HI y hi pueden ser cuan pequeñas se quieran, tomando mayor número de partes en la EA, lo que aproximará el punto I al punto H cuanto se quiera: luego si los dos miembros de la ecuacion son iguales en cualquier grado de aproximacion á sus límites, sus límites lo serán tambien, y por tanto $\frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{EA}} = \frac{eh}{ea}$: luego &a.

37. Prop. 44. *Si en un triángulo se tira una recta paralela á un lado, cortará los otros dos en partes proporcionales.*

Dem. Sea el triángulo AHC; Si EB es para- 65
lela á HC, será $\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EH}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}$. Porque tirando por A la Aa paralela á EB, y de cualquier tamaño, y tirando ah paralela á AC, y prolongando EB y HC hasta ah, por estar las dos rectas AH, ah cortadas por las tres paralelas Aa, Ee, Hh, será

$\frac{AE}{EH} = \frac{ae}{eh}$: pero $ae = AB$, y $eh = BC$ por paralelas entre paralelas: luego $\frac{AE}{EH} = \frac{AB}{BC}$: luego &a.

Reciprocamente, *si una recta corta proporcionalmente dos lados de un triángulo, es paralela al tercero.*

66 Dem. Si $\frac{AE}{EH} = \frac{AB}{BC}$, EB es paralela á HC: porque sino, lo seria á otra recta HL, y seria $\frac{EA}{EH} = \frac{AB}{BL}$: luego estas dos ecuaciones, que tienen los primeros miembros iguales, tendrán tambien iguales los segundos, y será $\frac{AB}{BC} = \frac{AB}{BL}$: siendo en estos dos quebrados iguales los numeradores iguales, tambien lo serán los denominadores y $BL = BC$, el todo igual á la parte, lo que es imposible: luego HL no puede ser paralela á EB, ni otra alguna recta, que no sea la HC: luego &a.

Prop. 45. *Si á varias rectas, que salen de un punto, las cortan dos paralelas, las cortan en partes proporcionales.*

67 Dem. Sean las rectas AB, AC, AD, AE, AF, cortadas por las paralelas BF, *bf.* En el triángulo ABC, por ser *bc* paralela á BC, será $\frac{AB}{Ab} = \frac{AC}{Ac}$. En el triángulo ACD, por ser *cd* paralela á CD, será $\frac{AC}{Ac} = \frac{AD}{Ad}$; del mismo modo se prueba que $\frac{AD}{Ad} = \frac{AE}{Ae}$, y que $\frac{AE}{Ae} = \frac{AF}{Af}$: luego $\frac{AB}{Ab} = \frac{AC}{Ac} = \frac{AD}{Ad} = \frac{AE}{Ae} = \frac{AF}{Af}$; luego &a.

38. Problemas. 1.° *Á tres rectas dadas hallar una 4.ª proporcional*

Sean las tres rectas m, n, p. Formo el ángulo 68
HAC. Tomo $AE = m$, $AB = n$, y tiro la EB; tomo $AH = p$, y tiro HC paralela á EB; será AC la 4.ª proporcional: porque siendo EB paralela á HC, será $\frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AC}$, ó $\frac{m}{n} = \frac{p}{AC}$.

2.° *Dividir una recta en cualquier número de partes iguales.*

Sea AF la recta dada. Tiro cualquier recta Fa, 69
y tomo sobre ella tantas partes iguales, como debe tener la recta dada: Desde a, adonde llega la última, tiro Aa, y por los demas puntos de division, tiro paralelas á Aa. Estas paralelas, que dividen la Fa en partes iguales, dividirán tambien la FA en el mismo número de partes iguales.

3.° *Dividir una recta en partes proporcionales á las de otra recta dada.*

Quiero dividir la recta AF en partes proporcio- 70
nales á las de la recta af. Tiro por F la Fa', y tomo sobre ella sucesivamente las partes de la fa; por el último punto a' tiro la Aa' y por los demas puntos de division sus paralelas, y dividirán la AF en partes proporcionales á las partes de Fa' ó de fa.

39. Dos triángulos son semejantes, cuando tienen sus ángulos respectivamente iguales.

Prop. 46. *Dos triángulos son semejantes* 1.° *si tienen dos ángulos del uno respectivamente iguales á dos ángulos del otro*: porque los terceros ángulos deberán ser tambien iguales.

2.° *Si tienen sus lados respectivamente parale-*

los: porque los ángulos formados de lados paralelos son iguales.

3.° Si tienen sus lados respectivamente perpendiculares.

71 Dem. Sea $A'C'$ perpendicular á AC, $B'C'$ perpendicular á BC, y $A'B'$ perpendicular á AB. Digo, que el ángulo $C' = C$, $A' = A$, $B' = B$. Porque prolongando $A'C'$ y $B'C'$ hasta que se encuentren con la AC, en el triángulo rectángulo $EC'F$, será el ángulo C' complemento de E, y en el triángulo rectángulo ECG, será el ángulo C complemento de E: pero los ángulos de un mismo complemento son iguales: luego $C = C'$: del mismo modo se probará que $A = A'$, y $B = B'$: luego &a.

4.° Si tienen sus lados proporcionales.

72 Dem. Sea $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$: tomo $AD = A'B'$, y tiro DE paralela á BC, será $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$: pero $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$: luego $\frac{AC}{AE} = \frac{AC}{A'C'}$: luego $AE = A'C'$. Tiro EF paralela á AB, y será $\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{BF}$: pero $AE = A'C'$ y $BF = DE$ por paralelas entre paralelas: luego $\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{DE}$: pero $\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$; luego $\frac{BC}{DE} = \frac{BC}{B'C'}$: luego $DE = B'C'$; luego los triángulos ADE, $A'B'C'$, que tienen sus lados iguales, son iguales: pero ADE es semejante á ABC, porque tienen el ángulo A comun, y los ángulos en D y B iguales por correspondientes: luego ABC y $A'B'C'$ son semejantes: luego &a.

5.° Si tienen un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales.

Dem. Sea el ángulo $A = A'$, y $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$. Coloco el triángulo $A'B'C'$ sobre ABC, de modo que se ajusten los ángulos iguales en A, y la base $B'C'$ venga á ser DE. Como por la hipótesi hay proporcion $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$, será DE paralela á BC, y los ángulos en D y B iguales por correspondientes; luego el triángulo ADE, ó $A'B'C'$ es semejante á ABC, pues tienen dos ángulos iguales: luego .&c.

40. *Lados homólogos* son los que se oponen á iguales ángulos en los triángulos semejantes.

Prop. 47. *Los triángulos semejantes tienen sus lados homólogos proporcionales.*

Dem. Sean semejantes los triángulos ABC, $A'B'C'$; será el ángulo $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$. Coloco el triángulo $A'B'C'$ sobre ABC, de módo que el ángulo A' coincida con su igual A, y el lado $B'C'$ caiga en la posicion DE; por ser el ángulo B' ó D igual al de la misma posicion B, será DE paralela á BC, y cortará proporcionalmente los lados AB, AC; luego $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$; ó $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$. Tiro por E la EF paralela á AB, y cortará proporcionalmente á AC y BC: luego $\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{BF}$, ó por ser $BF = DE$ por paralelas entre paralelas, será $\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$: luego &c.

Prop. 48. *Las paralelas, que cortan á varias rectas, que salen de un mismo punto, están cortadas por estas rectas en partes proporcionales.*

67 Dem. Los triángulos ABC, Abc semejantes, por tener el ángulo en A comun y $B = b$ por correspondientes, dan $\frac{AC}{Ac} = \frac{BC}{bc}$. Los triángulos CAD, Cad semejantes por la misma razon, dan $\frac{AC}{Ac} = \frac{CD}{cd}$: luego por igualdad de los primeros miembros, $\frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd}$. Del mismo modo probaré que $\frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de}$, y $\frac{DE}{de} = \frac{EF}{ef}$: luego &a.

41. Llámase escala una recta, dividida y subdividida en partes, de las cuales cada una representa en el papel una unidad de las que sirven para medir el terreno.

73 Para formar una escala de 1000 partes, se divide la recta en 10 partes iguales, y cada una de ellas, como desde 1 hasta 100, representará una centena. La primer centena se divide en 10 partes iguales, y cada una de ellas representará una decena. Para representar la unidad, es necesario tomar la décima parte de la decena, operacion dificil, porque para que las partes de escala no sean muy grandes, debe ser pequeña la decena. Para tomar la unidad con mas facilidad, se forma un rectángulo sobre la centena, cuya altura, de tamaño arbitrario, se dividirá en 10 partes iguales, y se tirarán por sus puntos de division paralelas á la centena. Tirando transversales desde los puntos de division de la centena superior á los inmediatos de la inferior, estas señalarán en la primer paralela, que encuentren, una unidad de la escala, en la segunda 2, en la 3.ª 3, &a.: porque los triángulos que forman con la al-

tura del rectángulo, son semejantes, y las bases de dichos triángulos deben estar entre sí en la misma razon que las divisiones de la altura.

Con esta escala es fácil pasar sobre el papel una línea medida en el terreno, dándole tantas partes de escala, como unidades tiene. Tambien es fácil saber cuantas unidades tiene una línea del papel, cogiéndola con el compas, y viendo sobre la escala cuantas partes coge de ella aquel intérvalo.

42. Problemas. 1.° *Medir una altura inaccesible por su estremo superior.*

Sea EF la altura, que quiero medir. Á una 74
distancia competente de su estremo inferior E, fijo dos jalones CD, AB, perpendiculares á la recta EA, que tiraré en el terreno, y alíneo al ojo los estremos D y B con el vértice F de la altura. Considerando tirada la recta BG paralela al horizonte, los triángulos BGF, BHD, semejantes por tener el ángulo comun B, y los ángulos en H y G rectos, dán $\frac{BH}{HD} = \frac{BG}{GF}$. En esta proporcion es conocido $BH = AC$, distancia de los jalones: lo es HD, diferencia de ellos: lo es $BG = AE$, distancia del jalon mas apartado del edificio al pie de este: luego podré conocer por 4.° término la GF; y añadiéndole GE ó BA, longitud del menor jalon, tendré la altura EF, que se ha pedido.

2.° *Medir una altura enteramente inaccesible.*

Este problema se reduce al anterior, tomando un 75
punto cualquiera A y determinando su distancia AE al pie de la altura, á que no se puede llegar. Para determinar la AE, levántole en A la perpendicular AB de un tamaño proporcionado, y en B tiro la

BQ perpendicular á AB de un tamaño arbitrario. Tiro desde Q la visual QE, y marco el punto O en que corta la AB. Los triángulos semejantes EAO, OBQ dán $\frac{BO}{BQ} = \frac{AO}{AE}$, que determina la AE. Esta misma operacion sirve para determinar una distancia, accesible solo por un estremo.

3.° *Determinar una distancia inaccesible por ambos estremos.*

76 Ser AB la recta inaccesible. Tómense tres puntos O, M, N, desde los cuales se descubran los estremos de AB; tirense OM, ON, y las visuales OA, OB, MA, NB hasta donde se puedan prolongar: tomese $RN = \frac{1}{2}ON$; tiro RS paralela á OB, y como corta á NO en su mitad, cortará tambien á BN en su mitad, y será $BS = \frac{1}{2}BN$. Tiro ST paralela á ON, y cortará á BO en su mitad T.

Con una operacion semejante corto á OA en su mitad Q: tiro la QT, que será paralela á AB, porque corta proporcionalmente los lados OA, OB del triángulo OAB: luego los triángulos OQT, OAB son semejantes, y sus lados proporcionales; y como OQ es mitad de OA, será QT mitad de AB; luego doblando la QT, se tendrá el valor de AB.

Si las visuales no se pueden prolongar mucho, tomese RN = á la 3.ª ó 5.ª parte &a. de ON; y saldrá la QT una parte semejante de AB.

43. Prop. 49. *Si dos rectas están cortadas por tres paralelas equidistantes, lo estarán en su mitad; y la paralela de en medio será igual á la semisuma de las otras dos.*

77 Dem. Si las paralelas A*a*, E*e*, H*h* son equidistantes, cortarán á las rectas AH, *ah* en la mis-

ma proporcion, que á la perpendicular, que se tirase entre ellas, es decir, por mitad.

Tambien tirando AC paralela á *ah*, es $Be = Aa$ por paralelas entre paralelas, y $EB = \frac{1}{2}HC$, por ser $AE = \frac{1}{2}AH$: luego $Ee = Aa + \frac{1}{2}HC = Aa + \frac{1}{2}Hh - \frac{1}{2}Aa = \frac{1}{2}Hh + \frac{1}{2}Aa$: luego &a.

Prop. 50. *Si desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo se baja una perpendicular sobre la hipotenusa, quedará el triángulo dividido en dos semejantes al total y semejantes entre sí.*

Dem. Sea el triángulo rectángulo ABC. Bajo 78
AD perpendicular sobre la hipotenusa: el triángulo BAD es semejante al total BAC, porque tienen el ángulo B comun, y los ángulos en D y A iguales por rectos: por la misma razon el triángulo CAD es semejante al total: luego todos tres son semejantes: luego &a.

Consecuencias. 1.ª *La perpendicular bajada desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos de esta*: porque los triángulos semejantes BAD, DAC tendrán sus lados proporcionales, y darán $\frac{BD}{DA} = \frac{DA}{DC}$, ó $DA^2 = BD \times DC$.

2.ª *Cada lado del ángulo recto es medio proporcional entre toda la hipotenusa y el segmento correspondiente*: porque los triángulos semejantes BAD, BAC dán $\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$ ó $AB^2 = BC \times BD$. Tambien en los triángulos semejantes CAD, CAB se tiene $\frac{CD}{AC} = \frac{AC}{BC}$, ó $AC^2 = BC \times CD$.

3.ª El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual á la suma de cuadrados de los otros dos lados. Porque siendo $AB^2 = BC \times BD$ y $AC^2 = BC \times CD$, sumando será $AB^2 + AC^2 = BC \times BD + BC \times CD = BC\ (BD + CD) = BC \times BC = BC^2$. Esta famosa proposicion es la 47 del libro 1.º de los elementos de Euclides y la mas clásica de toda la Geometría.

4.ª En el triángulo rectángulo, dados dos de sus tres lados, se puede determinar el que falta. Porque sea a la hipotenusa, b y c los lados; será $a^2 = b^2 + c^2$, y en esta ecuacion, dadas dos de las tres cantidades a, b, c, se puede determinar la tercera.

5.ª El cuadrado del lado opuesto á un ángulo agudo en un triángulo es igual á la suma de cuadrados de los otros dos lados, menos dos veces el producto de uno de ellos por la distancia del vértice del ángulo agudo á la altura bajada sobre él: y

El cuadrado del lado opuesto á un ángulo obtuso en un triángulo es igual á la suma de cuadrados de los otros dos lados mas dos veces el producto de uno de ellos por la distancia del vértice del ángulo obtuso á la altura bajada sobre él.

Dem. Tirada sobre AC la perpendicular BD,
79 resultan dos triángulos rectángulos BDA, BDC, que dán $AB^2 = BD^2 + AD^2$, $BD^2 = BC^2 - CD^2$: luego $AB^2 = BC^2 - CD^2 + AD^2$. Si $CD = AC -$

AD, como sucede cuando el ángulo C es agudo, será $AD^2 - CD^2 = AC^2 - 2AC.\ CD$, y $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC.\ CD$.

Si $CD = AD - AC$, como sucede cuando el ángulo C es obtuso, será $AD^2 - CD^2 = AC^2 + 2AC.\ CD$; y $AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2AC.\ CD$; luego &a.

6.ª *Dados los lados de un triángulo, es fácil determinar de que especie son los ángulos opuestos:* pues si el cuadrado de un lado es igual á la suma de cuadrados de los otros dos, su ángulo opuesto será recto: si es menor que dicha suma, su ángulo opuesto será agudo; y si es mayor, obtuso.

7.ª *La perpendicular bajada desde un punto de la circunferencia sobre el diámetro es media proporcional entre los segmentos del diámetro, y la cuerda tirada al estremo del diámetro es media proporcional entre el diámetro y el segmento correspondiente:* porque el triángulo, que forma el diámetro con las dos cuerdas tiradas á sus estremos, es rectángulo, por ser recto el ángulo, que insiste sobre el semicírculo: pero en el triángulo rectángulo la perpendicular es media proporcional entre los segmentos de la hipotenusa, y cada lado del ángulo recto es media proporcional entre la hipotenusa y el segmento correspondiente: luego &a.

8.ª *Los cuadrados de las cuerdas tiradas á los estremos del diámetro son como los segmentos correspondientes de este.*

Dem. Siendo cada cuerda media proporcional entre el diámetro y el segmento correspondiente, 80
será $AB^2 = BC \times BD$, y $AC^2 = BC \times CD$: luego

$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BD}{CD}$: luego &ca.

44. Prop. 51. *Si dos cuerdas se cortan en un círculo, el producto de las partes de la una es igual al producto de las partes de la otra.*

81 Dem. Sean las dos cuerdas BC, DE. Tiro las BE, CD: los triángulos ACD, ABE son semejantes, porque tienen los ángulos en A iguales por vérticales, y el ángulo B = D, por inscriptos que insisten sobre un mismo arco CE: luego son semejantes, y sus lados proporcionales; y será $\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$, ó AB x AC = AD x AE: luego &ca.

Prop. 52. *Si desde un punto tomado fuera de la circunferencia se le tiran dos secantes, cada una multiplicada por su parte esterna dá el mismo producto.*

82 Dem. Sean las dos secantes AC, AE. Tiro BC y DE. Los triángulos ABC, ADE tienen el ángulo en A comun, y los ángulos C y E iguales, por inscriptos que insisten sobre un mismo arco BD: luego son semejantes y sus lados proporcionales, y será $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$, ó AC x AD = AE x AB: luego &ca.

Prop. 53. *Si desde un punto dado fuera de la circunferencia se le tiran una secante y una tangente, la tangente será media proporcional entre la secante y la parte esterna.*

83 Dem. Sea AE la secante, y AB la tangente. Tiro BE y BD. Los triángulos ABE, ABD tienen el ángulo A comun, y el ángulo E = ABD; pues

ambos tienen por medida la mitad del arco BD, el primero por inscripto, y el segundo por formarse de una tangente y una cuerda; luego estos dos triángulos son semejantes, y sus lados proporcionales; esto es, $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AD}$: luego $AB^2 = AD \times AE$: luego &a.

45. Prob. *Entre dos rectas dadas hallar una media proporcional.*

Sean las dos rectas m, n. Tomo sobre una misma 84
recta $BA = m$, $AC = n$. Sobre BC describo un semicírculo: levanto en A, AD perpendicular á BC, y será media proporcional entre los segmentos BA, AC del diámetro; ó entre las dos rectas dadas m y n.

Dividir una recta dada en media y estrema razon es dividirla en un punto tal, que la parte mayor sea media proporcional entre toda la recta y su parte menor.

Dividir una recta en media y estrema razon.

Sea la recta dada AC. En su estremo A levánte- 85
tole la perpendicular $AD = \frac{1}{2}AC$. Haciendo centro en D con el radio DA describo un círculo; tírole por el centro la secante CD. Tomo su parte esterna CE sobre CA, y señalará el punto B, en que CA estará dividida en media y estrema razon.

Dem. Siendo CE′ secante, y CA tangente, por ser perpendicular al estremo A del radio, será la tangente media proporcional entre la secante y el segmento esterno: luego $\frac{CE'}{CA} = \frac{CA}{CE}$: restando numeradores y denominadores, resultará un quebrado igual á cualquiera de estos, como $\frac{CA}{CE}$: luego

$\frac{CA}{CE} = \frac{CE'-CA}{CA-CE}$: pero $CE' - CA = CE$, por ser CA $=$ al diámetro del círculo EE', pues $\frac{1}{2}CA$ fué su radio, y $CA - CE = AB$: luego $\frac{CA}{CB} = \frac{CB}{AB}$: luego $CB^2 = AC \times AB$: luego &a.

10.° *De los polígonos.*

46. *Polígono* es toda figura terminada por líneas rectas. *Cuadrilátero* es el polígono de 4 lados: *pentágono* el de 5: *exágono* el de 6: *octógono*, el de 8: *decágono*, el de 10: *pentedecágono* el de 15, &a.

Diagonal es toda recta tirada desde un ángulo á otro opuesto en una figura.

Angulos salientes son aquellos, cuyos lados forman un contorno convexo con los adyacentes de la figura; y *ángulos entrantes* son aquellos, cuyos lados y los adyacentes de la figura pueden ser cortados por una recta en mas de dos puntos.

Prop. 54. *La suma de los ángulos interiores de un polígono es igual á tantas veces dos rectos como lados tiene menos dos.*

Dem. Tirando diagonales desde un ángulo á los opuestos, resultarán tantos triángulos, como lados tiene el polígono menos dos: porque todos los lados del polígono, menos los dos adyacentes al ángulo, serán bases de dichos triángulos. Los tres ángulos de cada triángulo valen 2 rectos: pero los ángulos del polígono se componen de los ángulos de estos triángulos: luego &a.

Prop. 55. *La suma de los ángulos esteriores de un polígono, que resultan prolongando todos sus lados en un mismo sentido, es igual á 4 rectos.*

Dem. Sea n el número de lados del polígono. Cada ángulo esterior con su interior suman 2 rectos: luego la suma de ángulos interiores y esteriores es $2R \times n$. La suma de los interiores se ha demostrado que es $= 2R(n-2) = 2Rn - 4R$. Restando de la suma total, queda $4R$, suma de los esteriores: luego &ca.

47. *Polígonos regulares* son los que tienen todos sus lados y ángulos iguales: *irregulares* los que no.

El valor de cada ángulo interior de un polígono regular se halla partiendo la suma de sus ángulos por el número de ellos; $\frac{2R(n-2)}{n}$ es la fórmula, que representa el valor de un ángulo interior de un polígono regular de n lados.

Los cuatro ángulos de un cuadrilátero valen 4 rectos: porque la fórmula $2R(n-2)$, siendo $n = 4$, se convierte en $4R$.

El cuadrilátero, que tiene dos lados paralelos, y los otros dos no, se llama *trapecio*.

Paralelogramo es el que tiene cada lado paralelo á su opuesto.

Si un cuadrilátero tiene cada lado igual á su opuesto, ó dos lados opuestos iguales y paralelos, es paralelogramo; porque en ambos casos los lados opuestos son paralelos.

En todo paralelogramo los lados opuestos son iguales, por paralelas entre paralelas.

En todo paralelogramo los ángulos opuestos son iguales, por suplementos de uno mismo, que es el adyacente á ambos.

Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, lo serán todos cuatro; porque el opuesto le es igual, y los adyacentes son sus suplementos.

Rectángulo es un paralelogramo, cuyos cuatro ángulos son rectos.

Prop. 56. *Las diagonales de un rectángulo son iguales.*

86 Dem. Los triángulos ADC, BDC tienen los ángulos en D y C iguales por rectos, el lado DC comun, y el lado AD = BC por opuestos de un paralelogramo: luego son iguales, y AC = BD: luego &a.

Cuadrado es un rectángulo, cuyos cuatro lados son iguales,

Rombo es un paralelogramo, cuyos lados son iguales, sin ser rectos sus ángulos.

Prop. 57. *En todo paralelogramo las diagonales se cortan en su mitad.*

Dem. Sea el paralelogramo ADCB. Los triángulos AOD, BOC tienen los ángulos en O iguales por vérticales: los ángulos DAO, OCB iguales por alternos; y el lado AD = BC por opuestos de un paralelogramo: luego son iguales, y AO = OC, y DO = OB: luego &a.

Prop. 58. *En todo rombo las diagonales son perpendiculares entre si.*

87 Dem. Siendo AD = AB por lados del rombo, y OB = OD, porque la diagonal de un paralelogramo está dividida en su mitad por la otra, tiene la AOC dos puntos equidistantes de D y B: luego es perpendicular á DB: luego &a.

Cuando todos los lados de un polígono son cuerdas de un círculo, se dice que el polígono está inscripto en el círculo, ó el círculo cincunscripto al polígono.

Cuando todos los lados de un polígono son tangentes de un círculo, se dice que el polígono está circunscripto al círculo ó el círculo inscripto en el polígono.

48. Prop. 59. *Todo polígono regular puede inscribirse y circunscribirse en un círculo.*

Dem. Sea regular el polígono ABCDEF. Divido 88
en dos partes iguales los ángulos en A y B con las rectas AO, BO, que se encontrarán en O: tiro la OC y digo que esta será igual á OA y OB y dividirá por medio el ángulo en C. Porque el triángulo OAB es isósceles, por ser los ángulos OAB, OBA iguales por mitades de los ángulos iguales del polígono. Ademas, el triángulo OBC es igual á OAB, por tener el lado OB comun, BC = BA por lados de un polígono regular, y los ángulos comprendidos OBA, CBC iguales por construccion: luego el triángulo BCC es tambien isósceles, y por tanto OC = OB, y el ángulo OCB = OBC es tambien mitad del ángulo del polígono. Del mismo modo demostrarémos que OD, OE, OF son iguales á OA, y dividen por medio el ángulo del polígono. Luego haciendo centro en O con el radio OA, la circunferencia que se describa pasará por todos los vértices del polígono, y por tanto este quedará inscripto en ella.

Tambien, si desde O bajo la OG perpendicular al lado del polígono, lo dividirá por medio, y haciendo centro desde O con el radio OG, la circunferencia, que se describa, pasará por los puntos medios de los lados del polígono: porque siendo estos cuerdas iguales del círculo circunscripto deben equidistar del centro: y como en dichos puntos medios es el lado del polígono perpendicular al radio, serán tangentes á la circunférencia, y quedará el polígono circunscripto á ella: luego &a.

Llámase *centro de un polígono regular* el centro de sus círculos inscripto y circunscripto. *Radios oblicuos* del polígono son las rectas tiradas desde el centro á los ángulos; que deben dividirlos por medio. *Radios rectos* ó *apotecmas* del polígono son las perpendiculares bajadas desde su centro sobre los lados; que deben dividirlos por medio.

Para circunscribir un círculo á un polígono regular dado, tírense dos radios oblicuos, dividiendo por medio dos ángulos contiguos. El punto de su encuentro será el centro. Haciendo centro en él con el radio oblicuo, se tendrá la circunferencia circunscripta al polígono.

Para inscribir un círculo en un polígono dado, tiro dos apotecmas, levantando dos perpendiculares en las mitades de dos lados contiguos: el punto de su encuentro será el centro. Haciendo centro en él con la apotecma, tendré la circunferencia inscripta.

Ángulo del centro del polígono es el formado por dos radios oblicuos contiguos: su medida debe ser el arco que subtende el lado del polígono en el círculo circunscripto. Este arco es igual á toda la circunferencia, ó 4 rectos, dividida por el número de lados.

49. Problemas. 1.° *Dado un círculo y un polígono regular inscripto en él, circunscribirle otro polígono del mismo número de lados.*

Tírense tangentes en los puntos medios de los arcos, que subtenden los lados del polígono inscripto: y estas tangentes formarán el polígono circunscripto.

89 Dem. Sea el polígono inscripto ABCDEF. Las

tangentes ab, bc, cd, &a. por ser perpendiculares á los radios Og, Oi &a. son paralelas á los lados del polígono inscripto, forman ángulos iguales á los de este, y por consiguiente iguales entre sí. Ademas, los triángulos GOB, BOI iguales, por ser rectángulos, y ser OB comun, y $OG = OI$ por apotemas, son iguales; luego el ángulo $GOB = BOI$, y el ángulo GOI está dividido en su mitad por la OB. Tambien los triángulos gOb, bOi tienen, ademas de ser rectángulos, Ob comun, y $Og = Oi$: luego son iguales; luego la bO divide tambien por mitad el ángulo GOI, y por tanto, cae sobre la OB: luego las dos tangentes ab, bc se encuentran en la prolongacion del radio OB. Los triángulos semejantes OBA, Oba dán $\frac{OB}{Ob} = \frac{BA}{ba}$; los triángulos semejantes OBC, Obc dán $\frac{OB}{Ob} = \frac{BC}{bc}$: luego por ser los primeros miembros iguales, $\frac{BA}{ba} = \frac{BC}{bc}$; pero $BA = BC$, luego $ba = bc$. Lo mismo se probará de los demas lados del polígono circunscripto $abcdef$; y siendo sus ángulos iguales, se infiere que es regular.

Pudiera circunscribirse el polígono pedido tirando tangentes en los vértices del polígono inscripto: el polígono formado de estas tangentes seria regular, por la igualdad de los triángulos formados sobre los lados del inscripto.

2.° *Dado un círculo y un polígono circunscripto á él, inscribirle otro del mismo número de lados.*

Tiro los radios oblicuos del polígono circunscripto, y los puntos en que corten la circunferencia, serán los vértices del inscripto; porque se ha demostrado que el centro y cada dos vértices correspondientes del polígono inscripto y del circunscripto deben estar en una misma recta.

3.° En un círculo dado inscribir un exágono regular.

Llévese el radio como cuerda sobre la circunferencia, y la dividirá en seis partes iguales: porque el lado del exágono regular es igual al radio del círculo circunscripto.

90 Dem. Sea FE el lado del exágono regular inscripto; tirando los radios OF, OE, será el ángulo del centro $O = \frac{4R}{6} = \frac{2}{3}R$: y como los tres ángulos de un triángulo valen dos rectos, la suma de los ángulos OFE, OEF será $= 2R - \frac{2}{3}R = \frac{4}{3}R$; y como estos dos ángulos son iguales, por ser isósceles el triángulo OFE, cada uno vale $\frac{2}{3}R$, y es igual al ángulo O: luego el triángulo OFE es equiángulo, y por tanto equilátero: luego $FE = OF$: luego &a.

4.° Inscribir en un círculo dado un triángulo equilátero.

Inscríbase en dicho círculo un exágono regular y tomando arcos dobles de los que subtenden sus lados, las cuerdas de estos arcos formarán un triángulo equilátero: porque siendo iguales dichos arcos dobles, lo serán sus cuerdas.

91 Para hallar el valor del lado FD del triángulo equilátero inscripto, tiro los radios OF, OD, que siendo iguales á los lados DE, EF del exágono regular inscripto, forman con ellos un rombo, y sus diagonales DF, OE se cortan perpendicularmente. En el triángulo rectángulo DIO, es DI =

$\sqrt{(DO^2 - OI^2)}$: pero $OI = \frac{1}{2}OE = \frac{1}{2}OD$: luego $DI = \sqrt{\frac{3}{4}DO^2} = \frac{1}{2}DO\sqrt{3}$: luego su doble $DF = DO\sqrt{3}$. Luego el lado del triángulo equilátero inscripto es inconmensurable con el radio.

5.° *Inscribir en un círculo dado un cuadrado.*

Tírense dos diámetros perpendiculares, y tírense cuerdas por sus estremos, y formarán el cuadrado. 92

El lado del cuadrado inscripto AD se halla en el triángulo rectángulo ADC, en que $AD^2 + DC^2 = AC^2$: pero $DC = AD$: luego $2AD^2 = AC^2 = 4AO^2$: luego $AD^2 = 2AO^2$, y $AD = AO\sqrt{2}$: luego el lado del cuadrado es inconmensurable con el radio del círculo.

El lado del cuadrado es inconmensurable con su diagonal: porque esta es el diámetro del círculo circunscripto, y si el lado del cuadrado inscripto es inconmensurable con el radio del círculo, lo será tambien con el diámetro.

6.° *En un círculo dado inscribir un decágono regular,*

Divídase el radio en media y estrema razon, y su segmento mayor será el lado del decágono regular inscripto.

Dem. Sea AB el lado del decágono regular inscripto. Tiro los radios OA, OB, y la BC, que 93
divida por medio el ángulo OBA. El ángulo $O = \frac{4}{10}R = \frac{2}{5}R$: luego $OBA + OAB = 2R - \frac{2}{5}R = \frac{8}{5}R$, y como son iguales, será cada uno $= \frac{4}{5}R$: luego el ángulo $ABC = \frac{2}{5}R = O$: luego los triángulos AOB,

ABC tienen el ángulo A comun y el ángulo ABC = O: luego son semejantes, y si AOB es isósceles, tambien lo es ABC, y por consiguiente AB = BC; tambien es isósceles el triángulo OCB, por ser el ángulo OBC = O: luego BC = CO y por tanto AB = CO. Los triángulos semejantes OAB, ABC dán

$\frac{OA}{AB} = \frac{AB}{AC}$, ó poniendo por AB, su igual CO, $\frac{OA}{OC} = \frac{OC}{AC}$: luego el radio OA está dividido en C en media y estrema razon; y su segmento mayor OC es igual al lado del decágono regular inscripto: luego &a.

Para inscribir el pentágono regular en un círculo, se inscribe primero el decágono, y se tiran despues las cuerdas de los arcos dobles. Estas formarán el pentágono regular inscripto.

Como los lados del exágono y del decágono inscripto subtenden arcos, que son la 6.ª y 10.ª parte de la circunferencia, la diferencia de estos arcos, esto es $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$, dará el lado del pentedecágono inscripto.

7.º *Dado un circulo y un polígono regular inscripto en él, inscribirle otro polígono regular de doble número de lados.*

Divídanse por medio los arcos del polígono ya inscripto, y sus cuerdas formarán el polígono inscripto de doble número de lados.

Se sabe, pues, inscribir en el círculo los polígonos, cuyos números de lados están representados por 3×2^n, 4×2^n, 5×2^n y 15×2^n. Los demas polígonos se inscriben comunmente dividiendo por tanteo la circunferencia en tantas partes iguales como lados debe tener el polígono; aunque hay algunos, que la geometría inscribe con exactitud por medios, cuya esplicacion no tiene lugar en un tratado elemental.

50. Siguen algunos teoremas sobre los cuadriláteros.

1.° *En todo cuadrilátero inscripto en el circulo la suma de dos ángulos opuestos vale dos rectos*: porque siendo inscriptos los ángulos B y O, tendrán por medidas las mitades de los arcos AOC, ABC, y estos dos arcos suman toda la circunferencia. 94

2.° *Todo cuadrilátero, en que la suma de cada dos ángulos opuestos sea $=2$ rectos, es inscriptible en el circulo.*

Dem. Sea el cuadrilátero AOCB′ en que $A+C = 2R$, y $O+B' = 2R$. Hago pasar una circunferencia por los puntos A, O, C: si esta no pasa por B′, pasará por B, y tirando BA, BC, por ser el cuadrilátero ABCO inscripto, será $B+O = 2R$: pero $O+B' = 2R$ por hipótesi: luego $B+O = O+B'$, y quitando O comun, $B = B'$, lo que es absurdo, como se puede ver tirando la AC y la BB′: entónces el ángulo B, suma de dos ángulos esternos de los triángulos ABB′, CBB′, será mayor que la suma B′ de los internos: luego &a.

3.° *Todo rectángulo es inscriptible en el circulo*: pues la suma de sus ángulos opuestos vale dos rectos. Las diagonales del rectángulo serán diámetros del círculo circunscripto; porque cada ángulo del rectángulo está inscripto en la semicircunferencia, por ser recto.

4.° *En todo cuadrilátero inscripto en el circulo, el producto de las dos diagonales es igual á la suma de los productos de cada lado por su opuesto.*

Dem. Sea ABCD el cuadrilátero inscripto, DB, 95

AC sus diagonales. Formo el ángulo $DCK = BCA$. Los triángulos BCA, DCK tienen el ángulo $BCA = DCK$ por construccion, y los ángulos en A y D iguales por inscriptos sobre un mismo arco BC: luego sus lados homólogos son proporcionales, y será $\frac{CA}{BA} = \frac{CD}{DK}$, y $CA \times DK = CD \times BA$. Los triángulos BCK, ACD tienen los ángulos en B y A iguales por inscriptos sobre un mismo arco CD, y el ángulo $BCK = ACD$: porque si á los ángulos iguales BCA, DCK, se añade el ángulo ACK, será el ángulo $BCK = ACD$: luego dichos triángulos son semejantes, sus lados proporcionales, y será $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BK}$, y $CA \times BK = AD \times BC$. Sumando las dos ecuaciones, será $CA\ (DK + BK)$ ó $CA \times BD = CD \times BA + AD \times BC$; luego &a.

5.° *En todo paralelogramo la suma de cuadrados de las diagonales es igual á la suma de los cuadrados de los lados.*

96 Dem. Sea el paralelogramo $ABCD$; bájense AE, BF perpendiculares sobre DC: los triángulos rectángulos ADE, BCF son iguales, por ser $AD = BC$ por paralelas entre paralelas, y $AE = BF$ por la misma razon: luego $DE = CF$. Si el ángulo D es agudo, su suplemento C debe ser obtuso. En el triángulo ADC, por ser D ángulo agudo, será $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2DC \times DE$. En el triángulo DBC, por ser obtuso el ángulo C, será $BD^2 = BC^2 + DC^2 + 2DC \times CF$. Sumando, es $AC^2 + BD^2 = AD^2 + DC^2 + BC^2 + DC^2$: luego &a.

11.° *De las figuras semejantes y de la circunferencia.*

---

51. Dos polígonos son semejantes, cuando las diagonales, tiradas desde ángulos homólogos, los dividen en triángulos colocados en un mismo órden y respectivamente semejantes.

Prob. *Construir sobre una recta dada un polígono semejante á otro dado.*

Sea la recta dada *ab*, homóloga de AB. Tiro las 97
diagonales AC, AD, AE. Construyo sobre *ab* un triángulo *t* semejante á T, haciendo los ángulos *cab*, *cba* iguales respectivamente á CAB, CBA. Construyo sobre *ac* el triángulo t' semejante á T': y sobre *ad* el triángulo t'' semejante á T'', y sobre *ae*, t''' semejante á T''': la figura *abcdef* será semejante á ABCDEF, porque los triángulos parciales de la una son semejantes á los parciales de la otra.

Prop. 60. *Dos figuras semejantes tienen sus ángulos iguales y sus lados homólogos proporcionales.*

Dem. Sean semejantes las figuras ABCDEF, *abcdef*. Por ser semejantes los triángulos T y *t*, sus lados serán proporcionales, y por tanto $\frac{BC}{bc} = \frac{CA}{ca}$; por ser semejantes los triángulos T' y t', será $\frac{CA}{ca} = \frac{CD}{cd}$; y por igualdad de razones $\frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd}$. Del mismo modo se demuestra la proporcionalidad de los demas lados. Tambien por ser semejantes los triángulos T y *t*, será el ángulo BCA $=$ *bca*: por ser semejantes T' y t', será el ángulo ACD $=$ *acd*:

sumando estas dos ecuaciones, será $BCD = bcd$: del mismo modo se demuestra la igualdad de los demas ángulos: luego &a.

Prop. 61. *Si dos figuras tienen sus lados proporcionales y sus ángulos iguales, son semejantes.*

Dem. Los triángulos T y t son semejantes, por ser el ángulo $B = b$ por la hipótesi, y los lados que lo comprenden proporcionales, tambien por la hipótesi: Luego será el ángulo $BCA = bca$: restándolos de BCD y bcd iguales por la hipótesi, será $ACD = acd$. Tambien por ser T y t semejantes, es $\frac{BC}{bc} = \frac{AC}{ac}$: pero $\frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd}$ por la hipótesi: luego $\frac{AC}{ac} = \frac{CD}{cd}$: luego los triángulos T' y t' tienen iguales los ángulos en C, y comprendidos por lados proporcionales; luego son semejantes. Del mismo modo se demuestra la semejanza de los demas triángulos: luego estas dos figuras, que tienen semejantes sus triángulos parciales, son semejantes: luego &a.

Prop. 62. *Los polígonos regulares de un mismo número de lados son semejantes.*

Dem. Por ser regulares, los lados de cada uno serán iguales entre sí: luego la razon de un lado del uno al homólogo del otro será siempre la misma. Tambien por tener un mismo número de lados, el valor de cada ángulo será igual en ambos polígonos: luego tendrán sus lados proporcionales y sus ángulos iguales, y serán semejantes: luego &a.

Llámanse *líneas homólogas* en dos polígonos semejantes las que forman ángulos iguales con dos lados homólogos, y los dividen en partes proporcionales.

Prop. 63. *Las líneas homólogas de dos polí-*

gonos semejantes son proporcionales á sus lados.

Dem. Sean semejantes los polígonos ABCDEF, *abcdef*. Tiro las GH, *gh*, que formen ángulos iguales con los lados BC, *bc* y los dividan de modo que $\frac{BC}{bc} = \frac{CH}{ch}$. Tiro EH, *eh*, EC, *ec*. Por ser las figuras semejantes, lo son los triángulos ECD, *ecd*, y es $\frac{EC}{ec} = \frac{CD}{cd}$; pero $\frac{CD}{cd} = \frac{CB}{cb} = \frac{CH}{ch}$, luego $\frac{EC}{ec} = \frac{CH}{ch}$, y los ángulos comprendidos ECH, *ech* son iguales, por serlo los totales en C y *c*, y los parciales ECD, *ecd*: luego los triángulos EHC, *ehc* son semejantes, y será $\frac{EH}{eh} = \frac{CH}{ch} = \frac{BC}{bc}$. Los triángulos EHG, *ehg* tienen los ángulos EHG, *ehg* iguales, porque los totales en H son iguales por la hipótesi, y los parciales EHC, *ehc* lo son por ser el triángulo EHC semejante á *ehc*. Tambien los ángulos GEH, *geh* son iguales; porque los totales en E son iguales, como tambien los parciales HEC, *hec*, y CED, *ced*: luego los triángulos GHE, *ghe* son semejantes: y será $\frac{GH}{gh} = \frac{HE}{he} = \frac{CE}{ce} = \frac{ED}{ed}$ &a.: luego &a. 98

Se llama *perímetro* en una figura á la suma de sus lados.

Prop. 64. *Los perímetros de los polígonos semejantes son proporcionales á sus líneas homólogas.*

Dem. Por ser semejantes los polígonos ABCDEF, *abcdef*, será $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd}$... Sumando numerado- 97 res y denominadores, resultará una fraccion igual á cualquiera de estas: luego $\frac{AB+BC+CD+\ldots}{ab+bc+cd+\ldots} = \frac{AB}{ab}$: pero la razon de dos lados homólogos AB y *ab* es igual á la de dos cualesquiera dimensiones homólogas: luego &a.

Prop. 65. *Los perímetros de dos polígonos regulares de un mismo número de lados son como sus radios rectos y oblicuos.*

99 Dem. Los perímetros de dos polígonos regulares de un mismo número de lados, que son semejantes, son como $\frac{AB}{ab}$ ó como sus mitades IB, *ib*. Los triángulos IBO, *ibo* semejantes por el ángulo comun O y los ángulos rectos I, *i* dán $\frac{IB}{ib} = \frac{BO}{bo} = \frac{IO}{io}$: luego &a.

52. Prop. 66. *El círculo es el límite de todos los polígonos que se le pueden inscribir y circunscribir.*

100 Dem. Todo polígono inscripto en el círculo es menor que él, porque siempre la cuerda es menor que el arco, y ha de quedar un espacio entre el arco y la cuerda: pero si se dobla el número de lados del polígono inscripto, será AC + CB > AB, y quedará un espacio ACB entre el primer polígono y el 2.°: luego los polígonos inscriptos en el círculo aumentan doblando el número de lados: mas nunca llegan á igualar al círculo.

Tambien: la suma de las dos tangentes CE + EL > CL, y siempre queda el espacio CEL entre el polígono circunscripto y el círculo, y por tanto este es menor que todo polígono circunscripto. Si se dobla el número de lados del polígono circunscripto, será AK la mitad de uno de ellos, y siendo KA, perpendicular á OE, menor que KE, será $AK + KC < CE$, y quedará un espacio doble de KEA entre el nuevo polígono y el anterior: luego doblando el número de lados, el polígono circunscripto se hace menor y se acerca al círculo: mas nunca puede hacerse igual á él: luego &a.

Prop. 67. *Las circunferencias son como sus radios.*

Dem. Sean C y c dos circunferencias: Z y z los excesos de los perímetros de dos polígonos regulares de un mismo número de lados circunscriptos á ellas: dichos perímetros serán $C + Z$ y $c + z$. Sean R y r los radios de dichas circunferencias. Por ser los polígonos de un mismo número de lados, serán sus perímetros como los radios rectos R y r: y tendremos $\frac{C+Z}{c+z} = \frac{R}{r}$, ó despejando de quebrados, $Cr + Zr = cR + zR$. Cr y cR son invariables: Z y z son disminuibles á voluntad, pues miéntras mas se doble el número de lados de los polígonos circunscriptos, menores serán sus excesos Z y z sobre las circunferencias: luego si hay ecuacion entre las variables, la habrá entre sus límites, y $Cr = cR$, ó formando de estos productos iguales una proporcion, será $\frac{C}{c} = \frac{R}{r}$: luego &a.

Sea p la circunferencia de un círculo, cuyo diámetro es 1, ó la relacion de todo diámetro á su circunferencia. Para hallar el valor de la circunferencia, cuyo radio es R, ó cuyo diámetro es 2R diré: el diámetro 1 es á su circunferencia p como el diámetro 2R es á su circunferencia $C = 2pR$. Y si dada la circunferencia, se pide el radio, su valor $R = \frac{C}{2p}$.

53. Problema. *Determinar la relacion del diámetro á la circunferencia.*

Para resolver este problema, han empezado los matemáticos por resolver este otro: conocido el lado de un polígono regular inscripto, hallar el lado del circunscripto del mismo número de lados y el del inscripto de doble número de lados.

101 Sea $CD = a$ el lado del polígono inscripto dado. Sea su distancia OM al centro $= z$. Sea el lado AB del polígono circunscripto del mismo número de lados $= y$: y el lado CK del polígono inscripto de doble número de lados $= x$. El radio $CM = R$.

OM ó z se determina en el triángulo rectángulo CMO, donde $OM = \sqrt{(CM^2 - CO^2)}$ ó $z = \sqrt{(R^2 - \frac{1}{4}a^2)}$.

Conocida z, se determina la AB ó y, por los triángulos semejantes MCD, MAB, que tendrán sus alturas proporcionales con sus bases, ó $\frac{MO}{CD} = \frac{MK}{AB}$, ó $\frac{z}{a} = \frac{R}{y}$, de donde $y = \frac{Ra}{z}$.

Últimamente el lado CK del polígono inscripto de doble número de lados es hipotenusa del triángulo rectángulo COK, en el cual $CO = \frac{1}{2}a$, $OK = R - z$: luego $CK = \sqrt{(CO^2 + OK^2)}$ ó $x = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + R^2 - 2Rz + z^2)}$. Pero como $\frac{1}{4}a^2 = R^2 - z^2$, será $x = \sqrt{(2R^2 - 2Rz)}$.

Conocido, pues, el lado del exágono regular inscripto en el círculo, que es igual á su radio, buscando 1.° el valor correspondiente de z, y despues los de y y x, se tendrá el lado del exágono circunscripto, y el del polígono de 12 lados inscripto.

Hago este lado $= a$, y busco por el mismo órden el valor del lado del polígono de 12 lados circunscripto y del de 24 lados inscripto: despues el lado del polígono de 24 lados circunscripto, y el lado del polígono de 48 lados inscripto: esta operacion puede continuarse indefinidamente.

Si hacemos el diámetro $= 1$, y por tanto el radio $= \frac{1}{2}$, los cálculos para determinar los lados de los polígonos, siendo extracciones de raices cuadradas inexactas, son cálculos de aproximacion. Fíjese, pues, el número de notas décimales de esta aproximacion: y cuando se determinan los lados del polígono inscripto y circunscripto, determínense sus perímetros, multiplicando el valor del lado por el número de lados. Como en cada operacion se dobla el número de lados de dichos polígonos, se van acercando á la circunferencia, y entre sí, y vá siendo menor su diferencia. Luego cuando los perímetros lleguen á ser iguales en las notas de la aproximacion, esto indica que la diferencia del perímetro inscripto al circunscripto es entónces menor que la última clase de la aproximacion, y con mas razon la diferencia de uno de ellos á la circunferencia, que está entre ambos: luego el valor, que entónces tenga cada uno de dichos perímetros, será el valor de la circunferencia en el grado de aproximacion pedido: y como el diámetro es 1, dicho valor será la relacion del diámetro á la circunferencia, ó el valor de p. Arquímedes lo halló de $\frac{22}{7}$; Mecio de $\frac{355}{113}$: los modernos de 3,14159 &a. hasta 140 décimales.

54. Levantar el plano de un terreno es formar en el papel un polígono semejante al que forman en el terreno los objetos mas notables de él. Para esto se trazan en el papel triángulos semejantes á los que forman cada tres objetos en el terreno.

SUPERFICIES.

1.° *Areas de los polígonos y del círculo.*

55. *Area* es la estension comprendida entre las líneas, que terminan una figura. *Areas equivalentes* son las que comprenden igual espacio, aunque no puedan coincidir por ser de diferente figura.

Medir una area es ver cuántas veces cabe en ella otra area conocida, que se toma por unidad. Comunmente se toma por unidad para medir las areas un cuadrado, cuyo lado sea igual á la unidad líneal.

Prop. 68. *Dos rectángulos de igual base y altura son iguales.*

102 Dem. Sean los rectángulos ADFE, *adfe*, y sea AD = *ad*, DF = *df*. Sobreponiendo el segundo sobre el primero, de modo que coincidan sus bases iguales AD, *ad*, por ser el ángulo D = *d* por rectos, caerá la DF sobre *df*; y siendo iguales, el punto *f* caerá sobre F. Del mismo modo se demuestra la coincidencia de los demas lados y ángulos: luego &a.

Prop. 69. *Todo paralelogramo es equivalente á un rectángulo de igual base y altura.*

103 Dem. Sea el paralelogramo ADCB, y el rectángulo ADFE, que tienen la misma base AD; y teniendo igual altura, sus bases superiores BC, EF

deben estar en una misma recta paralela á AD. Los triángulos ABE, DCF, que tienen AB = DC por paralelas entre paralelas, AE = DF por la misma razon y el ángulo comprendido igual por ser sus lados paralelos, son iguales: restándolos sucesivamente de la figura total ADCE, los paralelogramos que quedan ADCB y ADFE son equivalentes: luego &a.

Los paralelogramos de igual base y altura son equivalentes entre sí: pues lo serán á los rectángulos de igual base y altura que ellos; y estos son iguales.

Prop. 70. *Todo triángulo es la mitad de un paralelogramo de igual base y altura.*

Dem. Sea el triángulo ABC. Tiro CD parale- 104
la á AB y BD paralela á AC. El paralelogramo ABCD tiene la misma base y altura que el triángulo, y es doble de él, porque los triángulos ABC, BCD, que tienen sus lados iguales, son iguales: luego &a.

Los triángulos de igual base y altura son equivalentes: pues lo son sus duplos, que son los paralelogramos de igual base y altura que los triángulos.

Los triángulos formados sobre una misma base, y cuyos vértices están en una misma paralela á dicha base, son equivalentes: pues tienen igual base y altura.

56. Prop. 71. *Los rectángulos de igual base son como sus alturas.*

Dem. Sean los rectángulos ABCD, *abcd*, cuyas 105
bases AB, *ab* sean iguales. Si sus alturas son conmensurables, supongamos que la medida comun quepa m número de veces en BC y n número de veces en bc; será $\frac{BC}{bc} = \frac{m}{n}$. Por los puntos de division tiro paralelas á las bases BC y bc: y

quedarán formados en el rectángulo ABCD m número de rectángulos parciales, y en el rectángulo $abcd$ n número de rectangulos parciales: estos serán todos iguales, pues tendrán por base á AB ó á ab, y por altura la medida comun: luego $\frac{ABCD}{abcd} = \frac{m}{n}$: por igualdad de razones, será $\frac{ABCD}{abcd} = \frac{BC}{bc}$; es decir, los rectángulos en razon de las alturas.

Pero si las alturas son incomensurables, divido la BC en cualquier número de partes iguales, y llevo una de ellas sobre bc. Es evidente que ningun punto de division podrá caer en c, por ser inconmensurables BC y bc. Sea l el mas próximo al punto c, y concluyo el rectángulo $abli$. Este y ABCD tienen sus bases iguales y sus alturas conmensurables: serán, pues, como sus alturas: luego $\frac{abli}{ABCD} = \frac{bl}{BC}$. Pongo en lugar de $abli$, $abcd + clid$, y en lugar de bl, $bc + cl$, y es $\frac{abcd}{ABCD} + \frac{clid}{ABCD} = \frac{bc}{BC} + \frac{bl}{BC}$. Los dos primeros términos de ambos miembros son invariables: mas los segundos son incrementos disminuibles á voluntad, pues el punto l puede acercarse á c, aumentando el número de partes en que se divide la BC. Luego si hay ecuacion entre las variables, la hay entre sus límites; y es $\frac{abcd}{ABCD} = \frac{bc}{BC}$: luego &a.

Prop. 72. *Los rectángulos son como los productos de sus bases por sus alturas.*

406 Dem. Sean los rectángulos ABCD, $abcd$. Coloco $abcd$ sobre ABCD, ajustando el ángulo recto a sobre

A, y será el rectángulo ALKI $=$ *abcd*. Prolongo IK hasta que corte en H la CB. Los rectángulos ALKI, ABHI, que tienen la misma base AI, serán como sus alturas AL, AB: esto es $\frac{ALKI}{ABHI} = \frac{AL}{AB}$. Los rectángulos ABHI, ABCD, que tienen la misma base AB, son como sus alturas AI, AD: esto es $\frac{ABHI}{ABCD} = \frac{AI}{AD}$. Multiplicando las dos ecuaciones, y suprimiendo ABHI, factor comun en numerador y denominador, será $\frac{ALKI}{ABCD} = \frac{AL \times AI}{AB \times AD}$: luego &a.

Prop. 73. *La area de un rectángulo es igual á su base multiplicada por su altura.*

Dem. Comparando el rectángulo ABCD con el cuadrado *abcd*, que se toma por unidad, serán entre sí como los productos de sus bases por sus alturas; esto es, $\frac{ABCD}{abcd} = \frac{AB \times BC}{ab \times bc}$: pero $ab = 1$, y $bc = 1$: luego $\frac{ABCD}{abcd} = AB \times BC$: esto es, el rectángulo contiene al cuadrado las veces que indica el producto de su base por su altura: luego &a. 107

La area de un paralelogramo es igual al producto de su base por su altura: pues es equivalente á la de un rectángulo de igual base y altura.

La area de un triángulo es la mitad de su base por su altura: pues es mitad de un paralelogramo de igual base y altura que él.

La area de un cuadrado es el cuadrado de su lado: pues siendo igual la base á la altura, el producto de las dos es el cuadrado de una de ellas.

El producto de dos líneas representa el area de un rectángulo formado sobre ellas. Una de las dos rectas, base ó altura del rectángulo, se llama *longitud* y la otra *latitud*; y entrambas se dicen ser las dos *dimensiones*, á que se reduce toda superficie. La aplicacion de estas denominaciones es de libre eleccion entre los dos lados, que determinan el rectángulo. El cuadrado de una línea representa el cuadrado formado sobre ella: y por tanto todas las proposiciones, demostradas acerca del producto de dos líneas y del cuadrado de una, quedan tambien demostradas de los rectángulos y cuadrados construidos con dichas líneas.

Prop. 74. *El area de un trapecio es igual á su altura multiplicada por su base media.*

108 Dem. Sea el trapecio AH*ha*. Si concebimos tirada la diagonal A*h*, quedará dividido en dos triángulos, cuyas areas son (llamando A la altura del trapecio) A. $\frac{1}{2}$H*h*, A. $\frac{1}{2}$A*a*: luego el area del trapecio será A ($\frac{1}{2}$H*h* + $\frac{1}{2}$A*a*): pero la base media E*e* es igual á la semisuma de las bases H*h* y A*a*: luego el area del trapecio es A × E*e*: luego &a.

Prop. 75. *El area de un polígono regular es igual á su perímetro multiplicado por la mitad de su apotecma.*

Dem. Tirando los radios oblicuos QA, OB &a.
68 quedará dividido en tantos triángulos como lados tiene. El area de cada uno es el lado que le sirve de base multiplicado por la mitad de la apotecma, altura igual de todos: luego la area del polígono será la mitad de la apotecma (que es factor comun) multiplicada por la suma de los lados, que es el perímetro: luego &a.

57. Prop. 76. *El area de un círculo es igual al radio multiplicado por la semicircunferencia.*

Dem. Circunscribo al círculo un polígono regular cualquiera. Sea S la superficie del círculo, x su diferencia á la del polígono: la area del polígono será $S + x$. Sea C la circunferencia, z su diferencia con el perímetro del polígono. Será $C + z$ el perímetro del polígono. Sea R el radio del círculo, que servirá de apotecma al polígono circunscripto. Siendo el area de un polígono regular igual á su perímetro multiplicado por la mitad de la apotecma, será $S + x = \frac{1}{2}CR + \frac{1}{2}zR$. Los primeros términos S y $\frac{1}{2}CR$ son invariables; x y z son disminuibles á voluntad, haciendo mayor el número de lados del polígono circunscripto: luego, si hay ecuacion entre las variables, debe haberla entre sus límites, y será $S = \frac{1}{2}CR$: luego &a.

La fórmula del area del círculo es pR^2. Porque siendo R el radio, la circunferencia es $2pR$, la semicircunferencia es pR, que multiplicada por el radio, dá pR^2, area del círculo.

La area de un segtor es igual al radio multiplicado por su semiarco. Porque el segtor debe ser á todo el círculo como su arco á la circunferencia; luego Segt. $= \frac{\text{Circ. x arco}}{\text{circunf.}}$. Pongo por *círculo*, $\frac{1}{2}R \times$ circunfer, y es Segt. $= \frac{1}{2}R \times$ arco. Para hallar la fórmula del segtor, sea n la relacion de su arco á la circunferencia, y será Segtor $=$ círculo $\times n = pR^2 \times n$.

58. Problemas. 1.° *Reducir una figura á otra que tenga un lado menos.*

Sea la figura ABDEFG. Tiro la diagonal AD, y 109
por B su paralela BC que encuentre la ED prolongada en C, y tirando la AC, será la figura

ABDEFG equivalente á ACEFG que tiene un lado menos. Porque los triángulos ADC, ADB, que tienen la base comun AD, y sus vértices en la paralela BC, son equivalentes. Añadiéndoles sucesivamente la figura ADEFG, será ABDEFG = ACEFG.

2.° *Reducir cualquier figura á triángulo.*

Redúzcase á otra que tenga un lado menos; esta á otra de un lado menos. Continuando esta operacion, se llegará á tener un triángulo equivalente á la figura dada.

3.° *Reducir un triángulo á cuadrado.*

Busco una media proporcional entre su base B y la mitad de su altura A: sea esta media proporcional x; será $x^2 = \frac{1}{2}AB$, y por tanto construyendo sobre ella un cuadrado, este será igual á $\frac{1}{2}AB$, que es la area del triángulo dado.

4.° *Reducir cualquier figura á cuadrado.*

Redúzcase á triángulo, y este á cuadrado.

5.° *Reducir un círculo á cuadrado.*

Búsquese una media proporcional entre su radio y la mitad de su circunferencia. El cuadrado construido sobre esta media proporcional será igual al radio multiplicado por la mitad de la circunferencia, que es el area del círculo. Para resolver este problema con exactitud, es preciso tener una recta igual á la circunferencia; y como esto no se ha conseguido sino por aproximacion, tampoco se puede resolver sino aproximadamente el problema de la cuadratura del círculo.

6.° *Hallar el area de un segmento circular.*

Tírense dos radios á sus estremos, y búsquese el area del segtor que encierran estos dos radios y el arco. Réstese de esta area la del triángulo, que forman los dos radios y la cuerda, y se tiene el area del segmento.

7.° Hallar el area de un polígono irregular. Divídase en triángulos; búsquese el area de cada uno, y la suma de todas será la del polígono.

2.° Comparacion de las superficies.

---

59. Prop. 77. *Los triángulos semejantes son como los cuadrados de sus líneas homólogas.*

Dem. Sean semejantes los triángulos ABC, *abc*: 110
el area de ABC $= \frac{1}{2}$AC x BD y la de *abc* $=$ $\frac{1}{2}ac \times bd$: luego $\frac{ABC}{abc} = \frac{AC}{ac} \times \frac{BD}{bd}$. Pero los triángulos ABD, *abd* son semejantes, por ser rectángulos y tener el ángulo A $= a$: luego $\frac{BD}{bd} = \frac{AB}{ab}$: pero en los triángulos semejantes ABC, *abc* es $\frac{AC}{ac} = \frac{AB}{ab}$: luego substituyendo, será $\frac{ABC}{abc} = \frac{AB^2}{ab^2}$: pero $\frac{AB}{ab}$ es igual á la razon de cualesquiera dos líneas homólogas de ambos triángulos: luego &a.

Prop. 78. *Los polígonos semejantes son como los cuadrados de sus líneas homólogas.*

Dem. Por ser semejantes los triángulos T, *t*, T′, 97
t′ T″, *t″*... serán como los cuadrados de sus lados: $\frac{T}{t} = \frac{AB^2}{ab^2}$, $\frac{T'}{t'} = \frac{AC^2}{ac^2}$ &a.: los segundos miembros son iguales, porque en los polígonos semejantes los lados son proporcionales: luego los primeros miembros lo son tambien, y es $\frac{T}{t} = \frac{T'}{t'} = \frac{T''}{t''}$ &a. $= \frac{AB^2}{ab^2}$.

Suma de antecedentes es á suma de consecuentes como un antecedente á su consecuente: luego $\frac{T+T'+T''\ldots}{t+t'+t''\ldots} = \frac{AB^2}{ab^2}$: pero $\frac{AB}{ab}$ es igual á la razon de otras dos líneas homólogas de ambas figuras: luego &a.

Los polígonos regulares de igual número de lados son como los cuadrados de sus radios rectos y oblicuos: porque estos polígonos son semejantes, y los radios rectos y oblicuos son dimensiones homólogas en ellos.

Prop. 79. *Los circulos son como los cuadrados de sus radios.*

Dem. Sean R y r los radios de dos círculos: sus areas serán pR^2, pr^2: pero $\frac{pR^2}{pr^2} = \frac{R^2}{r^2}$: luego &a.

Prop. 80. *La figura construida sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual á la suma de las figuras semejantes construidas sobre los dos catetos*, nombre, que se dá á los otros dos lados.

111 Dem. Sean M, N, P dichas tres figuras, cuyos lados homólogos son AB, BC, AC: serán como los cuadrados de dichos lados: esto es, $\frac{M}{AB^2} = \frac{N}{BC^2} = \frac{P}{AC^2}$. Sumando los términos de estos dos últimos quebrados, resultará una fraccion igual á cualquiera de ellos: esto es, $\frac{M}{AB^2} = \frac{N+P}{BC^2+AC^2}$: pero $AB^2 = BC^2 + AC^2$: luego $M = N + P$: luego &a.

Prop. 81. *El circulo construido sobre la hipotenusa es igual á la suma de los dos circulos construidos sobre los dos catetos.*

Dem. Sean C, c, c′ dichos círculos, cuyos diámetros son la hipotenusa H, y los dos catetos h, h': siendo los círculos como los cuadrados de los diámetros, será $\frac{C}{H^2} = \frac{c}{h^2} = \frac{c'}{h'^2}$: sumando los términos de las dos últimas fracciones, será $\frac{C}{H^2} = \frac{c+c'}{h^2+h'^2}$: pero $H^2 = h^2 + h'^2$: luego $C = c + c'$: luego &c.

60. Problemas. 1.° *Construir una figura igual á la suma de otras dos semejantes, y semejante á cada una de ellas.*

Tomo por catetos dos lados homólogos de las figuras dadas: y tirando la hipotenusa, la figura semejante á las dadas, construida sobre ella, será igual á la suma de las dadas.

2.° *Construir una figura semejante á dos dadas é igual á su diferencia.*

Tomo dos lados homólogos de ambas figuras: el de la mayor servirá de hipotenusa, el de la menor de cateto: y tirando el otro cateto, la figura construida sobre él, semejante á cualquiera de las dadas, será igual á su diferencia.

3.° *Construir una figura* $= M + N + P - Q - R$, *siendo todas estas figuras semejantes y dadas.*

Construyo una figura $= M + N$, y llámola x: será la figura pedida $= x + P - Q - R$. Construyo una figura $= x + P$ y llámola x': la fórmula se reduce á $x' - P - R$. Construyo una figura $= x' - P$ y llámola x'', y la cuestion se reduce á hallar una figura $= x'' - R$.

4.° *Construir un círculo igual á la suma de otros dos dados.*

Tomo los radios de los círculos por catetos: tiro la hipotenusa, y el círculo descrito con ella será igual á la suma de los otros dos.

5.° Construir un círculo igual á la diferencia de otros dos dados.

Tomo el radio mayor por hipotenusa y el radio menor por cateto. Tiro el otro cateto y el círculo descrito con él será la diferencia pedida.

6.° Construir un círculo $= M + N + P - Q - R$, *todos círculos dados.*

Construyo un círculo $= M + N$, y llámolo x. Construyo un círculo $= x + P$, y llámolo x'. Construyo un círculo $= x' - Q$, y llámolo x'': la cuestion se reduce á construir un círculo $= x'' - R$.

3.° De los planos y de los ángulos diedros.

---

61. Prop. 82. *Tres puntos, que no estén en línea recta, determinan la posicion de un plano.*

Dem. Por dos puntos pueden pasar una infinidad de planos. Si uno de ellos gira al rededor de la recta, que une dichos puntos, se irá sucesivamente confundiendo con todos los planos, que pasan por ella: pero si se determina fuera de dicha recta otro tercer punto, por donde deba pasar el plano, quedará entónces fijada su posicion: luego &ca.

Dos rectas que se cortan están en un mismo plano; porque la posicion de dichas rectas está determinada por tres puntos, el de concurso y otros dos, tomado cada uno en cada recta.

Un triángulo está todo entero en un mismo plano; pues lo determinan sus tres vértices, que no están en línea recta.

La comun seccion de dos planos es una recta: pues si fuera una curva, podrian pasar dos planos por tres puntos, tomados en dicha curva, que no estarian en línea recta: pero por tres puntos, que no estén en línea recta, solo puede pasar un plano: luego &a.

Una recta es perpendicular á un plano, cuando lo es á dos rectas, que se cruzan por su pie en dicho plano.

62. Prop. 83. *Si una recta es perpendicular á un plano, lo es á cualquier recta, que pase por su pie en dicho plano.*

Dem. Sea CD perpendicular á DE, DF, tiradas 112
en el plano AB: digo que será tambien perpendicular á DG, tirada en el mismo plano, y que pasa por D. Tiro la EF, que encuentre en G á la DG; tiro CE, CG, CF. Prolongo la CD hasta que $DC' = DC$, y tiro EC', GC', FC'. Por ser ED perpendicular á CC' en su mitad, $EC = EC'$, y por la misma razon $FC = FC'$: luego los triángulos EFC, EFC', que tienen EF comun, y los otros dos lados iguales, son iguales: luego el ángulo $CEF = C'EF$. Los triángulos CEG, $C'EG$, que tienen GE comun, $EC' = EC$ y el ángulo comprendido igual, son iguales: luego $CG = C'G$: luego la GD, que tiene los puntos G y D equidistantes de C y C', es perpendicular á CC': y pudiéndose demostrar lo mismo de cualquier otra recta, tirada en el plano AB, y que pase por D, se infiere que &a.

Prop. 84. *Si desde un punto tomado fuera de un plano se le baja una perpendicular, y desde su pie se tira en el mismo plano una perpendicular á otra recta tirada en él, la recta, que una el principio de la primer perpendicular y el pie de la segunda, será perpendicular á la recta* *tirada en el plano. Esto es, si* CD *es perpendicular al plano* AB, *y* GD *lo es á* FE, GE *será perpendicular á* FE.

Dem. Tomo GF = GE, y tiro CF, CE, FD, DE. FD = DE por oblicuas equidistantes de la perpendicular GD; y siendo CD perpendicular al plano, y por tanto á FD y á DE, los triángulos rectángulos CDF, CDE serán iguales, y CF = CE; luego el triángulo FCE será isósceles, y la recta CG tirada á la mitad de su base, será perpendicular á ella; luego &a.

Prop. 85. *Las oblicuas, que se separan igualmente de la perpendicular á un plano, son iguales.*

Dem Si FD = DE, los triángulos rectángulos CDF, CDE serán iguales, y por tanto CF = CE; luego &a.

Las oblicuas iguales se separan igualmente de la perpendicular á un plano; porque si CF = CE, los triángulos CDF, CDE rectángulos son iguales, por tener un lado comun, y sus hipotenusas iguales; luego DE = DF; luego &a.

Para tirar desde un punto una perpendicular á un plano, tírole desde el mismo punto tres oblicuas iguales; hago pasar por sus pies una circunferencia, y su centro será el pie de la perpendicular; pues esta debe equidistar de todas las oblicuas iguales.

La línea mas corta, que se puede tirar desde un punto á un plano, es la perpendicular; pues tirando desde el mismo punto una oblicua, esta será hipotenusa, y la perpendicular lado del triángulo rectángulo que se forma.

Desde un punto tomado fuera de un plano solo se le puede tirar una perpendicular; *pues la distancia mas corta debe ser una sola*.

63. Prop. 86. *Dos planos, perpendiculares á una recta, no pueden encontrarse.*

Dem. Sean los planos MN, *mn* perpendiculares á 113
la PA; si estos planos prolongados concurrieran en un punto O, las rectas OP, OA tiradas, una en un plano y otra en otro, serian perpendiculares á la PA; luego desde un mismo punto podrian tirarse dos perpendiculares á una recta, lo que es imposible; luego los planos MN, *mn* no pueden concurrir. Los planos, que no se encuentran prolongados indefinidamente, se llaman paralelos.

Prop. 87. *Si dos rectas son paralelas, y una de ellas es perpendicular á un plano, la otra lo será tambien.*

Dem. Sean las paralelas AP, BQ. Sea AP per- 114
pendicular al plano MN; digo que BQ será perpendicular al mismo plano. Porque, tirando la AB, por ser AP perpendicular al plano MN, lo será á la AB. Tiro la BE perpendicular á BA, y la CB á cualquier punto de la AP; será CB perpendicular á BE; luego BE, perpendicular á AB y á BC, será perpendicular al plano ABC, y á la recta BQ, que encuentra en él; pero BQ es tambien perpendicular á BA, por ser paralela á PA; luego BQ, perpendicular á las rectas BA, BE, es perpendicular al plano MN; luego &a.

Si dos rectas son perpendiculares á un plano, son paralelas entre sí: pues son perpendiculares á la recta, que une sus pies.

Dos rectas, paralelas á una tercera, son paralelas entre sí: porque tirando un plano perpendicular á la primera, lo será á la tercera y á la segunda; luego si todas son perpendiculares á un mismo plano, todas serán paralelas entre sí.

Si á dos planos paralelos los corta un tercero, las comunes secciones serán paralelas; pues si se encontrasen, se encontrarian tambien los planos, en que están, y no serian paralelos.

Prop. 88. *Una recta perpendicular á un plano, lo es á cualquier plano, paralelo al primero.*

115 Dem. Sean paralelos los planos MN, *mn*; sea PA perpendicular al plano MN; lo será á cualquier recta AC, que encuentra en él. Sea P*c* la comun seccion del plano PAC con el plano *mn*; AC y P*c* serán paralelas, por comunes secciones de los planos paralelos con el plano PAC; y siendo PA perpendicular á AC, lo será á su paralela PC. Del mismo modo se podrá tirar en el plano *mn* otra perpendicular en P á la PA, y será PA perpendicular á dos rectas del plano *mn*, y por tanto á dicho plano; luego &a.

Prop. 89. *Las paralelas comprendidas entre planos paralelos son iguales.*

116 Dem. Sean los planos paralelos ABC, *abc*; y las rectas paralelas A*a*, B*b*. Imaginando por ellas el plano A*b*, su comun seccion con *abc*, que es *ab*, y su comun seccion con ABC, que es AB, serán paralelas; luego la figura AB*ba* es un paralelogramo, y A*a* = B*b* por lados opuestos de un paralelogramo; luego &a.

64. *Ángulo diedro* es la mayor ó menor abertura de dos planos que se cortan. *Su arista* es la comun seccion de ambos planos.

Prop. 90. *Si dos planos paralelos cortan un ángulo diedro, los ángulos rectilíneos, que resultan de la interseccion de cada uno, son iguales.*

117 Dem. Sean A*ab*, A*ac* los dos planos, que forman el ángulo diedro, que se denota así *ba*AC.

Sean *abc*, ABC los dos planos paralelos que cortan al ángulo diedro. Tomo *ab* y AB iguales, *ac* y AC iguales, y tiro C*c*, B*b*, BC, *bc*. Los rectas *ab*, AB son paralelas por comunes secciones del plano A*ab* con los paralelos: las rectas *ac*, AC son paralelas, por comunes secciones del plano A*ac* con los paralelos. Siendo *ab* y AB paralelas é iguales, lo serán A*a* y B*b*: siendo AC y *ac* paralelas, lo serán A*a* y C*c*; luego B*b* y C*c* paralelas é iguales á la A*a*, son paralelas é iguales entre sí: luego BC, *bc* son tambien paralelas é iguales: luego los triángulos ABC, *abc*, que tienen sus lados iguales, son iguales: luego los ángulos BAC, *bac* son iguales; luego &a.

Prop. 91. *Si dos ángulos tienen sus lados paralelos, son iguales, y los planos en que están son paralelos.*

Dem. Sea AB paralela á *ab* y AC paralela á *ac*. Si el plano BAC no es paralelo á *bac*, lo será otro que pase por la AB, y su comun seccion con A*ac* será paralela á *ac*; pero AC lo es; luego por el punto A podrian pasar dos rectas paralelas á *ac*, lo que es imposible. Siendo dichos planos paralelos, los ángulos BAC, *bac* resultan de sus intersecciones con el ángulo diedro *ba*AC, y por tanto son iguales: luego &a.

Prop. 92. *Los triángulos, que reunen las estremidades de tres rectas paralelas é iguales, son iguales, y sus planos paralelos.*

Dem. Dichos triángulos son iguales, porque sus lados, que unen á rectas paralelas é iguales, deben ser iguales y paralelos; y como cualquiera de los ángulos de dichos triángulos tienen sus lados paralelos, se infiere que sus planos son paralelos: luego &a.

65. Prop. 93. *La medida del ángulo diedro es el ángulo rectilíneo, que resulta de la interseccion de un plano, perpendicular á su arista, con ambos planos.*

118 Dem. Sean BAPC, *bapc* dos ángulos diedros, y BAC, *bac* los ángulos rectilíneos, que resultan de la interseccion de los planos BAC, *bac* perpendiculares á las aristas AP, *ap*.

Si los ángulos BAC, *bac* son conmensurables, divídase cada uno en tantas partes iguales, como veces contiene á su medida comun, y tirando planos por las rectas de division Az, A*y*, A*x*, *az*′, *ay*′, *ax*′, y por las aristas AP, *ap*, quedará cada ángulo diedro dividido en tantos ángulos diedros parciales, como divisiones hay en su ángulo rectilíneo. Estos ángulos diedros parciales son tambien iguales entre sí: porque haciendo coincidir las aristas *ap*, AP, el punto *a* con A, y la *ab* con AB, el plano *pab* coincidirá con PAB. Tambien coincidirán los planos *bac*, BAC perpendiculares á las aristas; pues sino, en un punto de una recta se le podrian tirar dos planos perpendiculares, y ser ella perpendicular á dos rectas en un mismo plano que pasase por ella. Tambien coincidirán Az, Az′ por ser iguales los ángulos rectilíneos BAz, *baz*′: luego coincidirán los planos PAz, PAz′; luego los ángulos diedros BAPz, *bapz*′ coincidirán y serán iguales. Luego si la razon de los ángulos rectilíneos BAC, *bac* es $\frac{m}{n}$, la de los diedros será tambien $\frac{m}{n}$, y por tanto los ángulos diedros son proporcionales á los rectilíneos, cuando estos son conmensurables.

Pero si los ángulos rectilíneos son inconmensurables, divídase el uno de ellos *bac* en el número de partes iguales, que se quiera, y llévese una de ellas sobre el otro, hasta que quede un ángulo CAx, menor que la parte, que sirve de division. Los ángulos xAB, *cab* son conmensurables, y proporcionales por consiguiente á sus correspondientes ángulos diedros; luego $\frac{\mathrm{BA}x}{bac} = \frac{\mathrm{BAP}x}{bapc}$: pero BA$x$ = BAC — CAx, y BAPx = BAPC — CAPx; luego $\frac{\mathrm{BAC}}{bac} - \frac{\mathrm{CA}x}{bac} = \frac{\mathrm{BAPC}}{bapc} - \frac{\mathrm{CAP}x}{bapc}$; pero CA$x$, CAP$x$ pueden hacerse cuan pequeños se quieran, tomando mayor número de partes en el ángulo *bac*, lo que acercará la recta *ax* á la AC; luego si estos miembros son iguales en cualquier proximidad que tengan á sus límites, sus límites serán iguales; luego $\frac{\mathrm{BAPC}}{bapc} = \frac{\mathrm{BAC}}{bac}$, es decir, los ángulos diedros son proporcionales á los rectilíneos, aunque estos sean inconmensurables. Si *bapc* se toma por unidad de los ángulos diedros y *bac* por unidad de los rectilíneos, será BAPC = BAC: luego &a.

Las propiedades de los ángulos diedros, que resultan del concurso de varios planos, son las mismas que las que se han demostrado para los ángulos rectilíneos; pues estos los miden. Así la suma de dos diedros adyacentes es igual á dos rectos; si á dos planos paralelos los corta otro tercero, los diedros alternos y correspondientes serán iguales, &a.

Se dice que un plano es perpendicular á otro, cuando es recto el ángulo diedro que forman.

66. Prop. 94. *Si una recta es perpendicular*

á un plano, todo plano, que pase por ella, será tambien perpendicular al primer plano.

119 Dem. Sea AB perpendicular al plano MN. Tiro el plano PQ por la AB. Tiro AC en el plano MN perpendicular á AR. La recta AR perpendicular á BA y AC, lo será al plano BAC; luego el ángulo BAC es medida del diedro, que forman los planos; y siendo BAC recto, los planos son perpendiculares; luego &a.

Por una recta dada no se puede tirar mas que un plano perpendicular á otro dado; pues dicho plano quedará determinado por dicha recta, y por una perpendicular tirada al plano dado desde cualquier punto suyo.

Si tres rectas son perpendiculares entre sí, cada una lo es al plano de las otras dos: pues es perpendicular á dos rectas, que encuentra en él.

Prop. 95. *Si dos planos son perpendiculares entre sí, y en el uno se tira una perpendicular á la comun seccion, esta recta será tambien perpendicular al otro plano.*

Dem. Sea el plano PQ perpendicular á MN, y sea BA perpendicular á AR. Tirada la AC perpendicular á AR, siendo AR perpendicular á AB y AC, lo será al plano BAC: luego el ángulo BAC, que mide al diedro, debe ser recto, y AB perpendicurlar á AC; y siéndolo á AR, lo es al plano MN: luego &a.

Prop. 96. *Si dos planos son perpendiculares entre si, y en un punto de su comun seccion se tira una perpendicular al uno de ellos, estará en el otro.*

Dem. Si el plano PQ es perpendicular al plano MN, y AB tambien, AB estará en el plano PQ; porque sino, levantando en A una perpendicular á AR en el plano PQ, esta seria perpendicular al plano MN; y en el punto A se podrian tirar dos perpendiculares al plano MN: lo que es imposible: luego AB está en el plano PQ: luego &a.

Prop. 97. *Si dos planos son perpendiculares á un tercero, su comun seccion lo será tambien.*

Dem. Sean los planos PQ, SR perpendiculares 120
á MN. Si en el punto A se levanta una perpendicular al plano MN, deberá estar en el plano PQ y en el plano RS, que son perpendiculares al MN: luego dicha perpendicular será la comun seccion de PQ, RS: luego &a.

67. La proyeccion de un punto sobre un plano es el pie de la perpendicular bajada desde dicho punto sobre el plano.

La proyeccion de una recta sobre un plano es la serie de las proyecciones de sus puntos, ó la comun seccion del plano con otro perpendicular á él, que pase por dicha recta; porque todos los pies de las perpendiculares bajadas desde los puntos de la recta al plano, deben estar en dicha comun seccion. En efecto, estas perpendiculares no se separan del plano perpendicular; si se separasen, se podria tirar otra perpendicular al otro plano desde un punto de la recta dada, que seria la que se tirase desde dicho punto perpendicular á la comun seccion.

La inclinacion de una recta sobre un plano se mide por el ángulo, que forma dicha recta con su proyeccion.

4.° *De los ángulos poliedros.*

68. *Ángulo poliedro ó sólido* es el espacio indefinido, comprendido entre varios planos que concurren en un mismo punto. *Ángulo plano* es cada uno de los que se forman en el vértice del ángulo poliedro por las intersecciones de cada plano con los adyacentes.

Pirámide es el sólido, que resulta cortando con un plano todos los planos de un ángulo poliedro. La pirámide es regular, cuando su base es un polígono regular, y la línea que pasa por el vértice y el centro de la base es perpendicular á dicha base.

La pirámide, cuya base es un triángulo, se llama *tetraedro*.

Prop. 98. *Todo plano paralelo á la base de una pirámide corta todas las rectas tiradas desde el vértice á la base en la misma razon que un lado de la base tiene al correspondiente de la seccion.*

121 Dem. Sea el plano *abcde* paralelo á la base. AE y *ae* son paralelas por ser las comunes secciones de la base y del plano paralelo con el triángulo lateral SAE; por la misma razon son paralelas ED y *ed*, DC y *cd* &a. Luego los triángulos SAE y S*ae*, SED y S*ed*, SCD y S*cd* &a. son semejantes, y habrá estas proporciones $\frac{AE}{ae} = \frac{SA}{Sa} = \frac{SE}{Se} = \frac{SD}{Sd} = \frac{ED}{ed}$, &a. Tambien: tirando la SH desde el vértice á la base y tirando las EH, *eh*, deben ser paralelas por ser comunes secciones de la base y

del plano paralelo con el plano SEH: luego los triángulos SEH, Seh semejantes dán $\frac{SE}{Se} = \frac{SH}{Sh}$: pero $\frac{SE}{Se} = \frac{SA}{Sa} = \frac{AE}{ae}$: luego $\frac{SH}{Sh} = \frac{SA}{Sa} = \frac{AE}{ae}$: luego &a.

Prop. 99. *Todo plano paralelo á la base de una pirámide forma una seccion semejante á dicha base.*

Dem. La base ABCDE y la seccion *abcde* tienen sus lados paralelos y por tanto sus ángulos iguales: ademas sus lados están en la misma razon que están cortadas las aristas por el plano: luego sus lados son proporcionales y sus ángulos iguales: luego son figuras ssmejantes: luego &a.

Prop. 100. *Si en una pirámide se tira un plano paralelo á la base, la base y la seccion son como los cuadrados de sus distancias al vértice.*

Dem. Sea la base B y la seccion S: siendo figuras semejantes, serán como los cuadrados de sus dimensiones homólogas: luego $\frac{B}{S} = \frac{AE^2}{ae^2}$: pero $\frac{AE}{ae} = \frac{SH}{Sh}$: luego $\frac{B}{S} = \frac{SH^2}{Sh^2}$: luego &a.

69. Prop. 101. *Si tres ángulos planos forman un ángulo triedro, cualquiera de ellos es menor que la suma de los otros dos.*

Dem. Sea el ángulo triedro S formado de los 122
tres ángulos planos ASB, ASC, BSC. Sea ASB el mayor de ellos. Tiro la SD que forme en el plano ASB el ángulo DSB = CSB. Tomo SD de cualquier tamaño, y SC = SD; tiro por D cualquier recta BA, y en fin BC y CA: los triángulos BSC, BSD, que tienen BS comun, SC = SD y el án-

gulo comprendido igual por construccion, son iguales: luego BC = BD: pero BC + CA > BA, por ser BA línea recta: luego quitando BC = BD, será CA > DA: luego en los triángulos CSA, DSA, que tienen SA comun, y SC = SD, el que tenga mayor el tercer lado, tendrá mayor el ángulo opuesto: luego el ángulo CSA > DSA; añadiendo á ambas partes BSC = BSD, será ASC + CSB > ASD + DSB, ó > ASB: luego &a.

Prop. 102. *La suma de los ángulos planos, que componen un ángulo poliedro, es menor que cuatro rectos.*

123 Dem. Sea S el ángulo poliedro. Tiro el plano ABCDE, que corte todos los del ángulo poliedro. Tomo en dicho plano cualquier punto O, y tiro á los vértices de la base las rectas OA, OB, OC, OD, OE. Se formarán en la base tantos triángulos, como triángulos laterales hay en la pirámide: y como los tres ángulos de cada triángulo valen dos rectos, la suma de los ángulos de los triángulos laterales valdrán tanto como la suma de ángulos de los triángulos de la base. Cada ángulo AED de esquina de la base es menor que la suma de los dos ángulos AES, SED de los triángulos laterales, que forman con él un ángulo triedro: luego los ángulos inferiores de los triángulos laterales valen mas que los ángulos del polígono de la base: luego en compensacion los ángulos verticales de los triángulos laterales valen menos que los ángulos del punto O: pero estos valen 4 rectos: luego los ángulos del punto S valen menos que 4 rectos: luego &a.

70. Llámase *sólido regular* el que tiene todas sus caras iguales y sus ángulos poliedros compuestos de igual número de ángulos planos iguales.

No hay mas que cinco sólidos regulares.

Dem. Con tres ángulos de triángulo equilátero se puede formar ángulo poliedro: porque suman 2 rectos. El poliedro que resulta tiene 4 triángulos equiláteros por caras. Se llama *tetraedro.*

Con cuatro ángulos de triángulo equilátero, que suman $\frac{8}{5}$ de un recto, se puede formar ángulo poliedro. El sólido que resulta tiene ocho triángulos equiláteros por caras, y se llama *octoedro.*

Con cinco ángulos de triángulo equilátero, que valen $\frac{10}{5}$ de un recto, se puede formar ángulo poliedro. El sólido que resulta tiene 20 triángulos equiláteros por caras, y se llama *icosaedro.*

No se pueden formar mas sólidos regulares con triángulos, porque seis ángulos de triángulo equilátero valen 4 rectos.

Con tres ángulos de cuadrado, que valen 3 rectos, se puede formar ángulo poliedro. El solido que resulta tiene seis cuadrados por caras, y se llama *exaedro.*

Con cuatro ángulos de cuadrado, que valen 4 rectos, no se puede formar ángulo poliedro.

Con tres ángulos de pentágono regular, que componen $\frac{18}{5}$ de un recto, se puede formar ángulo poliedro. El sólido, que resulta, tiene 12 pentágonos regulares por caras, y se llama *dodecaedro.*

Con tres ángulos de exágono, que componen 4 rectos, no se puede formar ángulo poliedro, y menos con tres ángulos de eptágono, octógono, &a.; luego no hay mas que cinco cuerpos regulares.

71. Prop. 103. *Dos ángulos triedros, que tienen sus ángulos planos respectivamente iguales, tienen iguales los ángulos diedros.*

124 Dem. Sean los ángulos triedros S y *s*, que tienen el ángulo ASB = *asb*, el ángulo ASC = *asc* y el ángulo BSC = *bsc*: tomo SB = *sb*, y tiro los planos BAC, *bac* perpendiculares á SB, *sb*: y por tanto SB será perpendicular á las rectas BA, BC; y *sb* á las rectas *ba*, *bc*.

Los triángulos rectángulos SBA, *sba*, que tienen SB = *sb* por construccion, y el ángulo BSA = *bsa* por la hipótesi, son iguales: luego SA = *sa* y BA = *ba*.

Los triángulos rectángulos SBC, *sbc*, que tienen SB = *sb*, y BSC = *bsc* por la hipótesi, son iguales: luego SC = *sc* y BC = *bc*.

Los triángulos CSA, *csa*, que tienen SC = *sc* y SA = *sa*, y el ángulo comprendido igual por la hipótesi, son iguales: luego CA = *ca*.

Los triángulos ABC y *abc*, que tiene sus lados iguales, son iguales: luego el ángulo CBA = *cba*: pero estos ángulos rectilíneos miden á los ángulos diedros CBSA, *cbsa*: luego estos ángulos diedros son iguales. Del mismo modo se demostrará la igualdad de los demas: luego &a.

125 72. Se dice que dos ángulos poliedros son iguales por *simetria*, cuando los ángulos planos iguales están colocados á contrarias partes, como si fuese el ángulo ASB = A'S'B', BSC de la izquierda = B'S'C' de la derecha, y ASC = A'S'C': los ángulos diedros son tambien iguales en este caso: mas no es posible hacer coincidir los ángulos poliedros.

126 Dos cuerpos se llaman *simétricos*, cuando colocados el uno sobre una base comun, y el otro de-

bajo de ella, sus vértices están en una misma recta perpendicular á la base comun, y á igual distancia de esta base, como SABC, S'ABC. Entónces los ángulos poliedros S, S' son iguales por simetría: pues es fácil demostrar la igualdad de los ángulos planos que los componen: mas no es posible hacerlos coincidir, por estar á partes opuestas.

Dos ángulos triedros, que tienen un ángulo diedro igual, é iguales los ángulos planos adyacentes son iguales: pues haciendo coincidir las aristas del ángulo diedro igual, coincidirán los ángulos planos adyacentes, pues son iguales, y por consiguiente se ajustarán las otras aristas, y los ángulos triedros coincidirán.

Prop. 104. *Si dos ángulos poliedros constan de ángulos planos y de ángulos diedros, iguales y colocados en el mismo órden, son iguales.*

Dem. Ajustando dos ángulos diedros iguales, los ángulos planos adyacentes coincidirán, porque son iguales. Tambien coincidirán los ángulos diedros, que siguen á cada dos planos iguales, porque se suponen iguales. Del mismo modo se demostrará la coincidencia de los demas ángulos planos y diedros, y por tanto la de los dos ángulos poliedros propuestos: luego &a.

3.° *Superficies de los cuerpos.*

73. *Prisma* es el sólido, engendrado por el 128
movimiento de una recta siempre paralela é igual á si misma, que describe con su extremo A un polígono cualquiera ABCDE.

Arista del prisma es la recta A*a*, que se mueve paralela á si misma. *Prisma recto* es aquel en que la arista es perpendicular al plano de la base, y *oblicuo* en el que la arista está inclinada al plano de la base.

Las caras de un prisma son paralelogramos: pues si A*a* es igual y paralela á B*b*, AB será igual y paralela á *ab*, y el cuadrilátero, que forman, será un paralelogramo.

Prop. 105. *Toda seccion, paralela á la base de un prisma, es igual á dicha base.*

Dem. Sea la seccion $a'b'c'd'e'$ paralela á ABCDE: $a'b' = AB$ por paralelas entre paralelas: lo mismo se demostrará de los demas lados de la seccion y de la base. Tambien los ángulos ABC, $a'b'c'$ serán iguales, porque sus lados son paralelos: luego si la seccion y la base tienen sus lados y ángulos iguales, son iguales: luego &a.

Altura del prisma es la distancia de sus dos bases.

Prop. 106. *El area de un prisma es igual á su arista multiplicada por el perímetro de una seccion perpendicular á ella.*

129 Dem. Si la arista A*a* es perpendicular al plano de la seccion $a'b'c'd'e'$, lo serán todas las aristas, que son paralelas á A*a*: luego los lados de la seccion, que son perpendiculares á las aristas, serán las alturas de los paralelogramos laterales: el area de cada uno es igual á su base A*a*, que es la arista, multiplicada por su altura, que será un lado de la seccion: luego el area lateral, ó la suma de los paralelogramos, será igual á la arista, factor comun, multiplicada por la suma de los lados de la seccion.

El area de un prisma recto es igual á su arista multiplicada por el perímetro de su base:

pues siendo la arista perpendicular á la base, la seccion, perpendicular á la arista, será igual á la base.

74. *Paralelepipedo* es un prisma, cuya base es un paralelogramo.

Prop. 107. *Las seis caras del paralelepípedo son iguales y paralelas dos á dos.*

Dem. Los paralelogramos opuestos Ad, Bc tie- 130
nen los lados CB y cb iguales á DA y da, por ser las bases paralelogramos: tambien tienen Bb, Cc, Aa, Dd iguales por aristas del prisma: y el ángulo $cCB = dDA$, por ser sus lados paralelos: luego son iguales: y como Dd es paralela á Cc y DA es paralela á CB, los planos de dichos paralelogramos, que pasan por estas rectas, son paralelos: lo mismo se podrá demostrar de los paralelogramos Dc, Ab: luego &a.

En un paralelepípedo se pueden tomar por bases cualesquiera dos de los paralelogramos opuestos: pues son iguales y paralelos.

Paralelepipedo rectángulo es aquel, que ademas de ser recto, tiene por base un rectángulo. *Cubo* es un paralelepípedo rectángulo, que tiene por base un cuadrado y su arista igual al lado de la base, y por tanto sus caras son seis cuadrados iguales.

Cilindro es un cuerpo formado por el movimiento de una recta, que corre con un estremo una curva cualquiera, quedando siempre paralela á si misma. *Generatriz* del cilindro es la recta que lo forma con su movimiento. Si la base es un círculo, el ege del cilindro es la recta que une los centros de las dos bases paralelas.

Toda seccion de un cilindro paralela á su base, es igual á ella: porque tirando planos por el ege del cilindro y la generatriz, que son rectas iguales y paralelas, las comunes secciones de la base y de la seccion serán iguales y paralelas: luego si la base es un círculo, sus radios son iguales, la seccion lo será tambien, y tendrá un radio igual al de la base: luego &a.

Cilindro recto es el que tiene sus generatrices perpendiculares al plano de la base, y oblicuo, el que no.

Prop. 108. *La superficie lateral de un cilindro recto es igual á su ege multiplicado por la circunferencia de la base.*

Dem. Sea S la superficie lateral del cilindro: C la circunferencia de su base; H su altura: circunscribo á la base un polígono regular y sobre él construyo un prisma de la misma altura que el cilindro: la superficie de este prisma será mayor que la del cilindro, á quien envuelve: sea x el exceso de la area del prisma sobre la del cilindro, y z el exceso del perímetro de la base del prisma sobre el de la del cilindro: será $S + x$ el area del prisma, y $C + z$ el perímetro de su base: pero el area del prisma recto es igual al perímetro de su base por su altura: luego $S + x = H(C + z)$. S, H y C son cantidades invariables: x y z disminuyen doblando el número de lados del polígono de la base: luego si hay ecuacion entre las variables, la habrá entre los límites, y será $S = CH$: luego &a.

Sea R el radio de la base del cilindro: será $2pR$ su circunferencia, y el area lateral del cilindro será $2pRH$.

Prop. 109. *El area del cilindro oblicuo es igual á su ege multiplicado por el perímetro de una seccion perpendicular á su ege.*

Dem. Cortando el cilindro por dicha seccion, y 131
uniendo sus dos bases ABCD, *abcd*, se convertirá en un cilindro recto, cuyo ege y superficie serán los mismos, y sus bases serán iguales á la seccion: luego su area será el perímetro de la seccion multiplicado por el ege.

74. El area de una pirámide cualquiera se halla sumando las areas de sus caras.

Prop. 110. *El area de una pirámide regular es igual al semiperímetro de su base multiplicado por la apotecma.*

Dem. Los triángulos laterales son iguales, y sus alturas, que son las apotecmas, deben serlo tambien· pero el area de cada uno es igual á su altura multiplicada por la mitad de su base: luego la suma de todos es igual á la apotecma, factor comun, multiplicada por la semisuma de las bases, que es el semiperímetro de la base de la pirámide; luego &a.

Cono es un sólido engendrado por el movimiento de una recta, que, fija en un estremo, corre con el otro una curva cualquiera. En estos elementos solo hablamos del cono, cuya base es un círculo. *Ege del cono* es la recta tirada de su cúspide al centro de su base. El cono es *recto*, cuando el ege es perpendicular al plano de la base, y *oblicuo*, cuando no.

Prop 111. *Toda seccion paralela á la base del cono es un círculo.*

Dem. Tirando planos por el ege y la generatriz, la línea que cojan en la seccion ha de ser al radio de la base en la razon de sus distancias al cúspide: luego está línea tendrá siempre el mismo valor, sea cual fuere la generatriz por donde pase el plano, pues los tres últimos términos de la proporcion son siempre los mismos: luego todas las líneas tiradas en la seccion desde el ege hasta las generatrices son iguales: luego la seccion es un círculo, cuyo centro está en el ege.

Prop. 112. *El area lateral del cono es igual á su lado multiplicado por la mitad de la circunferencia de su base.*

132 Dem. Sea S el area del cono, C la circunferencia de su base, L su lado. Circunscribo á la base un polígono regular, y construyendo sobre él una pirámide regular del mismo cúspide que el cono, será $S + x$ el area de esta pirámide, y $C + z$ el perímetro de su base, siendo x y z los respectivos excesos de la pirámide sobre el cono: luego $S + x = \frac{1}{2}L (C + z)$, de donde resulta ecuacion entre los límites $S = \frac{1}{2}CL$, por ser x y z disminuibles á voluntad: luego &a.

Sea R el radio de la base del cono: su circunferencia será $2pR$, y el area lateral del cono será LpR.

El area de una pirámide truncada de bases paralelas es igual á la altura de uno de sus trapecios laterales multiplicada por el perímetro de una seccion media entre las dos bases: porque siendo sus caras trapecios de igual altura, la suma de ellas será la altura de un trapecio multiplicada por la suma de las bases medias, ó por el perímetro de una seccion media entre ambas bases.

Prop. 113. *El area de un cono truncado es igual á su lado multiplicado por la circunferencia de la base media.*

Dem. Sea S el area de un cono truncado, $S + x$ la de la pirámide regular circunscripta: C la circunferencia de la base media: $C + z$ el perímetro del polígono regular circunscripto á ella, L el lado del cono, que será la altura del trapecio lateral, El area de la pirámide truncada será $S + x = L$ $(C + z)$; luego si hay ecuacion entre las variables, los límites son iguales, y $S = CL$: luego &a.

Sean R y r los radios de ambas bases: el de la media será $\frac{R+r}{2}$, y su circunferencia será $p\,(R + r)$, y el area del cono truncado $Lp\,(R + r)$.

75. La *esfera* es un cuerpo engendrado por 133
la revolucion de un semicírculo ADB al rededor de su diámetro AB.

Se llama *casquete esférico* la superficie engendrada por el arco AD próximo al diámetro: *zona* la superficie engendrada por el arco DF ó DE, que no toca al diámetro: *segtor esférico* el sólido engendrado por la revolucion del segtor circular ACD: *segmento esférico* el sólido engendrado por la revolucion del semisegmento circular ADI al rededor del diámetro.

Todos los puntos de la superficie de la esfera distan igualmente de su centro: pues los puntos de la semicircunferencia generatriz se han conservado equidistantes de dicho centro en toda la revolucion.

Cualquier diámetro de la esfera pudo haber servido de ege para su formacion: pues su correspondiente semicircunferencia hubiera pasado en la revolucion por los mismos puntos que otra cualquiera; es decir, por los puntos que distan del centro de la esfera una cantidad igual á su radio.

Todo plano, que pasa por el centro de la esfera, la corta por su círculo generador: pues cualquiera de los diámetros, que cogerá dicho plano, puede suponerse que es el ege de la esfera.

Círculos máximos de la esfera son aquellos, cuyo plano pasa por el centro de la esfera.

134 *Superficie de revolucion* es la que forma cualquier curva ACDB girando al rededor de un ege AB.

Prop. 114. *Todo plano, perpendicular al ege de una superficie de revolucion, forma una circunferencia circular en su interseccion con dicha superficie*: porque la recta DI, perpendicular al ege, forma en su revolucion un plano perpendicular tambien al ege, cuya interseccion con la superficie es la curva descrita por el punto D: pero el punto D describe un círculo, porque siempre conserva la misma distancia DI al ege: luego &a.

133 Prop. 115. *Toda seccion de la esfera, hecha por un plano, es un circulo.* Porque, si el plano es DG, tomando por ege de la esfera el diámetro AB perpendicular á este plano, su seccion con la superficie de la esfera será un círculo.

Las secciones mas lejanas del centro de la esfera forman circulos mas pequeños: porque el diámetro del círculo de la seccion es la cuerda DG, y las cuerdas son tanto mas pequeñas, cuanto mas se alejan del centro.

Circulos menores de la esfera son aquellos, cuyos planos no pasan por su centro.

76. Prop. 116. *Si un semipoligono regular gira al rededor de un ege, el area de cualquier porcion de la superficie engendrada es igual á la parte del ege correspondiente á dicha porcion multiplicada por la circunferencia del círculo inscripto.*

135 Dem. Sea ABDIP una porcion del semipolígono, AO su ege, C el centro del círculo inscripto, que deberá estar en dicho ege, si este ha de equidistar de cada dos vértices del polígono total. El lado AB inmediato al ege forma un cono, cuya superficie lateral es la mitad de su lado multiplicado por la cir-

cunferencia de su base, esto es, AQ x circ.ª BN. Tirando el radio CQ, los triángulos rectángulos ACQ, ABN, semejantes por tener el ángulo comun A, dán $\frac{CQ}{BN} = \frac{AQ}{AN}$: pero $\frac{CQ}{BN} = \frac{\text{cir. } CQ}{\text{cir. } BN}$: luego $\frac{AQ}{AN} = \frac{\text{cir. } CQ}{\text{cir. } BN}$, y AQ x cir. BN = AN x cir. CQ, y representando el 1.er producto la area del cono, tambien la representará el 2.°, que es la parte AN de ege que le corresponde por la circunferencia del círculo inscripto.

Los lados BD, DI, oblicuos al ege, describen conos truncados. La area del que describe DI es = DI x cir. KL, base media. Los triángulos DIG, KLC semejantes por tener sus lados perpendiculares dán $\frac{CK}{KL}$, ó $\frac{\text{cir. } CK}{\text{cir. } KL} = \frac{DI}{DG}$, de donde DG x cir. CK = DI x cir. KL, y si el 2.° miembro es el area del tronco, tambien lo será el 1.°: luego cada cono truncado tiene por area la parte de ege, que le corresponde, multiplicada por la circunferencia inscripta.

Últimamente, si hay un lado YP paralelo al ege, describirá un cilindro, cuya area es MO x cir. PO; pero PO es = al radio del círculo inscripto: luego tambien esta area es igual á su porcion de ege multiplicada por la circunferencia inscripta.

Luego sumando varias de estas areas, cualquier porcion de la superficie engendrada será = á la circunferencia inscripta, factor comun, multiplicada por la suma de porciones del ege: luego &a.

Prop. 117. *El area de un casquete esférico es igual á la parte de ege que le corresponde multiplicada por la circunferencia del círculo máximo.*

Sea AI una porcion de polígono regular circunscripto al arco de círculo máximo, cuya revolucion forma el casquete: el número de lados de esta porcion de polígono se determina por el número de partes en que se divida el arco. Sea C la area del casquete: u el exceso del area, engendrada por la porcion de polígono, sobre el area del casquete: esta area será $C+u$: sea x la altura del casquete, y z el exceso de la altura AM del area, formada por el polígono, sobre la altura del casquete: será $x+z$ la altura de dicha area; y como dicha area es igual á su altura multiplicada por la circunferencia del círculo máximo, llamando esta circunferencia P, será $C+u=P\ (x+z)$, ó $C+u=Px+Pz$; C y Px son invariables, u y Pz disminuyen á arbitrio: pues miéntras mas lados tenga el pedazo de polígono, mas se acercan su area y su altura á las del casquete: luego habrá ecuacion entre las invariables y será $C=Px$; luego &a.

Poniendo en lugar de P, que es la circunferencia del círculo máximo, su valor $2pR$, será $2pRx$ la fórmula del area del casquete.

La area de media esfera es igual al radio multiplicado por la circunferencia del circulo máximo: pues es un casquete, cuya altura es el radio. Su fórmula será $2pR \times R$ ó $2pR^2$.

La area de la esfera es igual á su diámetro, multiplicado por la circunferencia del circulo máximo: pues debe ser doble de la area de media esfera: su fórmula es $2pR \times 2R$ ó $4pR^2$.

La area de la esfera es cuadrúpla de la de su círculo máximo: pues la area de la esfera es $4pR^2$ y la del círculo máximo es pR^2.

La area de una zona esférica es igual á su altura multiplicada por la circunferencia del circulo máximo. Porque la zona es la diferencia de los dos casquetes, que rematan en sus bases: sea x la altura del mayor y x' la del menor: la area del mayor será $2pRx$, la del menor $2pRx'$; restando, será la de la zona $2pR(x - x')$: pero $x - x'$ es la altura de la zona: luego &a.

La area de la esfera es igual á la lateral del cilindro circunscripto: porque siendo la area de este igual á su ege multiplicado por la circunferencia de la base, será $2R \times 2pR$, por ser la base un círculo del mismo radio que el de la esfera: pero

$2R \times 2pR = 4pR^2$, area de la esfera: luego &a.

La area de la esfera es $\frac{2}{3}$ *de la total del cilindro circunscripto*: porque la lateral de este, igual á la de la esfera, es igual á 4 círculos máximos: luego añadiendo las dos bases, que equivalen á dos círculos máximos, la area del cilindro equivaldrá á 6 círculos máximos: la de la esfera equivale á 4: luego &a.

6.° *De los poliedros semejantes y simétricos.*

---

77. Llámase poliedro todo espacio encerrado por superficies planas. *Poliedros convexos* son aquellos, cuya superficie no puede ser cortada por una línea recta mas que en dos puntos. En estos poliedros, prolongado indefinidamente el plano de una de sus caras, todo el sólido ha de quedar situado á un mismo lado de dicho plano. En estos elementos solo tratamos de los poliedros convexos.

136 *Dos tetraedros son semejantes*, cuando tienen dos caras semejantes é igualmente situadas, y el ángulo diedro, que forman dichas caras, es igual.

Prop. 118. *Los tetraedros semejantes tienen 1.° sus aristas proporcionales: 2.° todas sus caras semejantes: 3.° sus ángulos diedros y triedros respectivamente iguales.*

Sea el tetraedro SABC semejante á S′A′B′C′: es decir, sea la cara SBC semejante á S′B′C′, SAC semejante á S′A′C′ y el ángulo diedro SCAB = S′C′A′B′. Coloco el punto S′ sobre S, la arista S′C′ sobre SC, y llegará á *c*, y la cara S′B′C′ sobre SBC: por ser iguales los ángulos diedros SCAB, S′C′A′B′, cayendo el plano S′B′C′ sobre SBC, el plano S′C′A′ caerá sobre SCA. Por ser el triángulo SBC semejante á S′B′C′, serán iguales sus ángulos en S, S′: y cayendo el lado S′C′ sobre SC, el lado S′B′ caerá sobre SB hasta *b*: y por ser tambien iguales los ángulos en B y B′, la base B′C′ caerá en *bc* paralelamente á BC. Del mismo modo demostraré, por ser semejantes los triángulos S′C′A′, SCA, que la arista S′A′ caerá sobre SA, hasta *a*, y la base A′C′ caerá en *ac* paralelamente á AC: luego el plano *abc*, pasando por el ángulo *bca*, cuyos lados son paralelos á los de BCA, será paralelo á la base ABC: pero dos planos paralelos, que cortan un ángulo triedro, hacen todas las aristas proporcionales: luego las aristas del tetraedro S*abc* son proporcionales á las del tetraedro SABC. Tambien: el triángulo *bac* es semejante al BAC, por ser sus ángulos formados de paralelas y por tanto iguales: y el triángulo S*ab* es semejante á SAB, por ser iguales los ángulos en *b* y B, *a* y A por correspondientes: luego todas las caras de un tetraedro son semejantes á las del otro. Tambien: todos los ángulos triedros son iguales: pues cada dos correspondientes se compondrán de ángulos planos, que serán iguales por pertenecer á triángulos semejantes; y los ángulos diedros serán tambien iguales, porque lo son los triedros: luego &a.

Dos tetraedros, que tienen todas sus aristas proporcionales, son semejantes. Porque los triángulos, que forman las aristas, serán semejantes, por tener sus lados proporcionales: luego tendrán sus ángulos iguales, y los ángulos triedros se compondrán de ángulos planos iguales, y los ángulos diedros serán iguales: luego habrá un ángulo diedro igual formado por caras semejantes y los tetraedros serán semejantes: luego &a.

Dos tetraedros, que tienen todas sus caras semejantes, son semejantes: pues tendrán todas sus aristas proporcionales, por ser lados de triángulos semejantes.

Dos poliedros son semejantes, cuando tirando diagonales desde dos ángulos homólogos á los demas, quedan divididos en tetraedros respectivamente semejantes.

78. Prop. 119. *Los poliedros semejantes tienen sus aristas proporcionales, sus ángulos poliedros y diedros iguales, y sus caras semejantes.*

Dem. Suponiendo los dos poliedros semejantes divididos en tetraedros semejantes por medio de las diagonales tiradas desde los ángulos homólogos A y a, las aristas del poliedro serán respectivamente aristas de los tetraedros parciales; y siendo estos semejantes, dichas aristas serán proporcionales: y como cada una se halla en dos tetraedros, se podrán comparar las de dos tetraedros semejantes con las de otros dos contiguos, y todas serán proporcionales. 138

Los ángulos poliedros se componen de los ángulos triedros de los tetraedros semejantes; y siendo estos ángulos triedros respectivamente iguales, tambien lo serán los poliedros.

Cada ángulo diedro de dos caras es la suma de los ángulos diedros de los tetraedros que pasan por la arista comun á dichas dos caras: y siendo los ángulos diedros de los tetraedros semejantes respectivamente iguales, tambien lo serán los ángulos diedros de los poliedros.

Sean I, D, E, F cuatro vértices de un poliedro, é *i*, *d*, *e*, *f* los correspondientes del otro. Sean IDE, IEF las bases de los tetraedros formados por las diagonales tiradas desde A, é *ide*, *ief* las bases de los tetraedros semejantes del otro poliedro. Si los triángulos IDE, IEF forman un solo plano cuadrangular, las bases *ide*, *ief* formarán otro plano cuadrangular semejante al primero: porque el ángulo DIE $=$ *die* por la semejanza de los triángulos en que están: por la misma razon EIF $=$ *eif*: tambien tirando las DF, *df*, serán semejantes los triángulos DIF, *dif* por ser sus lados proporcionales, y será el ángulo DIF $=$ *dif*: pero DIF $=$ DIE $+$ EIF, por la hipótesi de estar los triángulos DIE, EIF en un mismo plano: luego *dif* $=$ *die* $+$ *eif*; pero esto no podria ser si los triángulos *die*, *eif* no estuviesen en un mismo plano, pues entónces el ángulo *dif* seria menor que la suma de los otros dos *die*, *eif*: luego estos dos triángulos forman un mismo plano; y del mismo modo demostraré que si las bases de los tetraedros parciales forman en un poliedro cualquier polígono, las bases de los correspondientes tetraedros formarán en el otro otro polígono del mismo número de lados que el primero, y semejante á él, pues constará de triángulos respectivamente semejantes á los del primero: luego las caras de los poliedros semejantes son semejantes: luego &a.

79. Prop. 120. *Las areas de los poliedros semejantes son como los cuadrados de sus aristas homólogas.*

Dem. Estas areas se componen de caras, respectivamente semejantes; luego serán como los cuadrados de sus aristas homólogas: pero todas sus aristas son proporcionales: luego las caras tambien, y la suma de todas las caras de un poliedro, que componen su area, es á la area del otro en la misma razon que dos caras semejantes, ó en la misma razon que los cuadrados de sus aristas homólogas: luego &a.

Cilindros semejantes son los que tienen los rectángulos generadores semejantes, es decir, sus alturas proporcionales á los radios de sus bases.

Prop. 121. *Las areas de los cilindros semejantes son como los cuadrados de sus alturas ó de los radios de sus bases.*

Dem. Sean R y r los radios de las bases, y H y h las alturas: llamando S y s las superficies, será $S = 2p\mathrm{RH}$, y $s = 2prh$: luego $\frac{S}{s} = \frac{\mathrm{RH}}{rh} = \frac{R}{r} \times \frac{H}{h}$: pero $\frac{H}{h} = \frac{R}{r}$ en los cilindros semejantes: luego sustituyendo será $\frac{S}{s} = \frac{R^2}{r^2}$: luego &a.

Conos semejantes son los que tienen semejantes sus triángulos generadores, y por tanto los radios de las bases proporcionales á alturas y apotecmas.

Prop. 122. *Las areas de los conos semejantes son como los cuadrados de los radios de sus bases,* *ó como los cuadrados de sus alturas y apotecmas.*

Dem. Sean S, s las areas de los dos conos; R y r los radios de sus bases; A y a sus apotecmas: será $S = pAR$, $s = par$: luego $\frac{S}{s} = \frac{AR}{ar} = \frac{A}{a} \times \frac{R}{r}$: pero en los conos semejantes $\frac{A}{a} = \frac{R}{r}$: luego sustituyendo $\frac{S}{s} = \frac{R^2}{r^2}$: luego &a.

Prop. 123. *Las areas de las esferas son como los cuadrados de sus radios.*

Dem. Sean S y s las areas de las esferas, R y r los radios: será $S = 4pR^2$ y $s = 4pr^2$: luego $\frac{S}{s} = \frac{R^2}{r^2}$: luego &a.

80. Dos poliedros son *simétricos*, cuando cada dos vértices correspondientes están en una misma recta perpendicular á un plano, y á igual distancia de dicho plano.

Prop. 124. *Los poliedros simétricos tienen iguales sus aristas, caras, ángulos poliedros y diedros.*

137 Dem. Sean A, B, C, D, a, b, c, d los vértices de dos poliedros simétricos con respecto al plano MN: será $AP = aP$, $BQ = bQ$. Doblando el trapecio $AabB$ por la recta PQ, caerá QB sobre Qb por ser rectos los ángulos en Q, y PA sobre Pa por ser rectos los ángulos en P: por ser $PA = Pa$, caerá A sobre a, y por ser $QB = Qb$, caerá B sobre b: luego AB se ajustará con ab y serán iguales: luego las aristas son iguales.

El triángulo $ABC = abc$ por ser iguales las aristas que lo forman: por la misma razon $ACD = acd$: si ABC y ACD forman un solo plano cuadrangular abc y acd formarán tambien un solo plano cuadrangular: porque el ángulo $BAC = bac$ por estar en triángulos iguales: $CAD = cad$ por la misma razon: $BAD = bad$, porque tirando las aristas BD, bd, serán iguales los triángulos BAD, bad: pero el ángulo $BAD = BAC + CAD$ por la hipótesi de estar los triángulos BAC y CAD en un mismo plano: luego $bad = bac + cad$; pero si los triángulos bac y cad estuviesen en diferentes planos, seria bad menor que $bac + cad$: luego dichos triángulos forman un solo plano, y por tanto á cada cara de un sólido corresponde otra en su simétrico del mismo número de lados, é igual á ella, pues constan de triángulos respectivamente iguales: luego las caras son iguales.

Los ángulos poliedros son iguales, porque constan de ángulos triedros iguales. Los ángulos diedros son iguales, por ser iguales los ángulos poliedros: luego &a.

Prop. 125. *Todo paralelepípedo se compone de dos prismas triangulares simétricos.*

Dem. Sea el paralelepípedo Ac. Por las aristas 139
opuestas Dd, Bb tiro el plano $DdBb$, que será un paralelogramo, por ser Dd igual y paralela á Bb: por tanto los sólidos $ABDabd$, $DBCdbc$ son dos prismas triangulares, pues todas sus caras son paralelogramos, y sus bases son triángulos paralelos é iguales, por ser mitades de los paralelogramos iguales $ABCD$, $abcd$. Ahora bajando desde a la perpendicular aF al plano $ABCD$, y tirando las AF, DF, y desde C la perpendicular Cf al plano $abcd$, y tirando las bf, cf, tendremos que las perpendiculares aF, Cf son iguales por paralelas entre planos paralelos. Tambien los triángulos aAF, Ccf son

iguales: por ser $Aa = Cc$ por aristas, $aF = Cf$ y el ángulo $AaF = cCF$, por ser sus lados paralelos: luego el lado $AF = cf$. Del mismo modo demostrarémos que $DF = bf$, suponiendo tiradas las rectas aD, Cb que serán iguales y paralelas, porque las unen DC y ab iguales y paralelas: luego el triángulo $ADF = bcf$ por tener sus lados iguales.

Coloco el prisma $DBCbcd$ bajo el prisma $ADBadb$, de modo que la base dbc coincida con su igual ADB, poniendo bc sobre su igual AD y cd sobre su igual AB. El triángulo cfb coincidirá con su igual ADF, el punto f caerá sobre F, y las Fa, Cf, perpendiculares á un mismo plano, estarán en una misma recta, y como son iguales, los vértices a y C (transferido á E) equidistarán de la base comun: y como se podrá demostrar lo mismo de los vértices d y B transferido á I, y b y D transferido á H, serán dichos dos prismas simétricos: luego &a.

VOLUMENES.

81. *Se puede construir un prisma recto equivalente á un oblicuo, teniendo ambos una misma arista.*

140 Dem. Sea el prisma oblicuo AD: prolongo sus aristas, y tiro el plano MN perpendicular á su prolongacion: tomo $Pp = BD$ y tiro el plano po paralelo á PO. El sólido OB se puede sobreponer á OD. Porque la base OP se puede sobreponer á su igual op. Siendo $Pp = BD$, añadiendo á ambas partes pB, será $PB = pD$, y por tanto el punto B caerá sobre D. Los planos AB, CD coincidirán por estar igualmente inclinados á la arista: y siendo las bases AB, CD iguales, coincidirán tambien: luego los sólidos OB, oD coinciden, y son iguales;

quitando de ambos el sólido oB, será el prisma recto Op equivalente al oblicuo AD: luego &a.

Prop. 126. *Dos prismas simétricos son equivalentes.*

Dem. Sean los dos primas simétricos AD, ad, simétrizados con respecto al plano MN perpendicular á la direccion de sus aristas: construyo los prismas rectos OP, Op' respectivamente equivalentes á los prismas simétricos: estos prismas rectos podrán coincidir por ser sus bases y aristas iguales: luego serán iguales: luego los simétricos, que son equivalentes á ellos, son equivalentes entre sí.

82. Prop. 127. *Los paralelepípedos de igual base y altura son equivalentes.*

Dem. Sean los dos paralelepípedos EI, EN, cuyas bases superiores MI, HN estén entre las paralelas MN, GK: los prismas triangulares $EGMH$, $FINK$ son superponibles, colocando IF sobre su igual GE: por ser el ángulo $E = F$ por formados de paralelas, FK caerá sobre su igual EH, y las bases triangulares GEH, IFK coincidirán: las aristas MG, NK de ambos prismas son iguales: luego coincidirán el uno con el otro y serán iguales: restándolos ambos del sólido total, quedará el paralelepípedo $EI =$ al paralelepípedo EK: luego dos paralelepípedos de una misma base y altura, que ajustados por la base inferior, tienen las superiores entre unas mismas paralelas, son equivalentes. 141

Si ajustadas las bases inferiores, no quedan las superiores entre unas mismas paralelas, como sucede á las bases $ABCD$, $abcd$, prolongando CD y BA, bc y ad hasta que se encuentren, formarán el paralelogramo $A'B'C'D'$: este será igual á cada uno de los otros dos: porque sus ángulos son igua- 142 les á los de ABCD, y *abcd* por las paralelas, y los lados A'D', B'C' son iguales á AD y BC por paralelas entre paralelas, así como los lados C'D', B'A' son iguales á *cd*, *ba* por paralelas entre paralelas: luego el paralelogramo A'B'C'D', siendo igual á cualquiera de los otros dos, será igual á la base comun inferior; y haciendo pasar un tercer paralelepípedo desde la base inferior hasta el paralelogramo A'B'C'D', este será equivalente al que tiene por base superior á ABCD, porque sus bases superiores están entre unas mismas paralelas CD', BA': el tercer paralelepípedo será equivalente al que tiene por base superior á *abcd*, porque sus bases superiores están entre unas mismas paralelas *b*C', *a*D': luego los dos paralelepípedos propuestos, equivalentes al tercero, son equivalentes entre sí: luego &a.

Prop. 128. *Un paralelepípedo oblicuángulo es equivalente á otro rectángulo de igual altura y base equivalente.*

143 Dem. Sea ABCD la base del paralelepípedo oblicuángulo propuesto: levantando en sus vértices cuatro perpendiculares iguales á su altura, el paralelepípedo ABEI, que tiene la misma base y altura, que el propuesto, será igual á él. Tomo en el paralelepípedo ABEI por base la cara AM; y levantando en sus vértices cuatro perpendiculares iguales á la altura del paralelogramo ABCD, formaré el paralelepípedo rectángulo equivalente á ABEI, por tener la misma base y altura que él, y por tanto equivalente al propuesto: luego &a.

83. Prop. 129. *Dos paralelepípedos rectángulos de una misma base son entre sí como sus alturas.*

105 Dem. Si las alturas son conmensurables, dividiéndolas en partes iguales á su medida comun, y

tirando planos paralelos á la base, quedarán divididos en paralelepípedos rectángulos iguales, porque tendrán iguales bases y alturas; y como en cada uno de los dos paralelepípedos habrá tantos parciales, como veces contiene su altura á la medida comun, será un paralelepípedo al otro en la misma razon que sus alturas.

Si las alturas BC, *bc* son inconmensurables, divídase la altura BC en un cierto número de partes iguales, y tómense sobre *bc* partes iguales á las de BC: el último punto de division no caerá en *c*, pues BC y *bc* son inconmensurables, sino en *l* fuera de la *bc*: tiro el plano *li* paralelo á la base *ab*: y como BC y *bl* son conmensurables, los paralelepípedos *al*, AC son como sus alturas: esto es $\frac{al}{AC} = \frac{bl}{BC}$: pero $al = ac + dl$ y $bl = bc + cl$: sustituyendo es $\frac{ac}{AC} + \frac{dl}{AC} = \frac{bc}{BC} + \frac{cl}{BC}$. Los primeros términos de cada miembro son constantes: pero *dl* y *cl* son disminuibles á voluntad, pues el punto *l* puede acercarse cuanto se quiera al punto *c*, tomando partes mas pequeñas en la BC: luego si existe la ecuacion, despues de hechos los incrementos, existia antes, y será $\frac{ac}{AC} = \frac{bc}{BC}$: luego &a.

Prop. 130. *Dos paralelepípedos rectángulos de igual altura son entre sí como sus bases.*

Dem. Sean dichos paralelepípedos P y *p*, y colóquense de modo que coincidan en un ángulo triedro, y en la arista de la altura, que es igual: y sean sus bases AC y AK. Prolónguese la IK, hasta H, y levántese sobre la base AH un para- 106

lelepípedo, que llamo Q, de igual altura que los otros dos. Los paralelepípedos P y Q tienen comun la base levantada sobre la arista AB, y serán como sus alturas AD, AI: esto es $\frac{P}{Q} = \frac{AD}{AI}$.
Los paralelepípedos Q y p tienen comun la base levantada sobre la arista AI, y serán como sus alturas AB, AL, ó $\frac{Q}{p} = \frac{AB}{AL}$: multiplicando estas dos ecuaciones, será $\frac{P}{p} = \frac{AD \times AB}{AI \times AL}$: pero AD × AB es la superficie del rectángulo AC, base del paralelepípedo P, y AI × AL es la superficie del rectángulo AK, base de p: luego &a.

Prop. 131. *Dos paralelepipedos cualesquiera son como los productos de sus bases por sus alturas.*

Dem. Sean los dos paralelepípedos P, p: sus bases B y b, sus alturas A y a. Prolongo el paralelepípedo p hasta que tenga tanta altura como P, y llamo Q al paralelepípedo p prolongado. Como P y Q tienen una misma altura, serán como sus bases, esto es, $\frac{P}{Q} = \frac{B}{b}$: como Q y p tienen una misma base, serán como sus alturas, esto es, $\frac{Q}{p} = \frac{A}{a}$: multiplicando estas dos ecuaciones, será $\frac{P}{p} = \frac{A \times B}{a \times b}$.

Prop. 132. *Los paralelepipedos rectángulos son como los productos de sus tres dimensiones, es decir, de las tres aristas que concurren en un ángulo triedro.*

Dem. Una de estas aristas es A, a: las otras dos C, D, multiplicadas entre sí componen la base B; y en el otro paralelepípedo c, d multiplicadas entre sí componen la base b: siendo, pues, $\frac{P}{p} = \frac{A \times B}{a \times b}$, poniendo por B, C × D, y por b, $c \times d$, será $\frac{P}{p} = \frac{A \times C \times D}{a \times c \times d}$: luego &ca.

Para medir el volumen de los cuerpos, se ha tomado por unidad el cubo, cuyas aristas son iguales á la unidad líneal.

84. Prop. 133. *El volumen de un paralelepípedo rectángulo es igual á su base multiplicada por su altura.*

Dem. Sea P el paralelepípedo y C el cubo que se toma por unidad. Sea A la altura del paralelepípedo, y D y G las dimensiones de su base: como el cubo es un paralelepípedo rectángulo, cuyas dimensiones son 1, 1 y 1, será $\frac{P}{C} = \frac{A \times D \times G}{1 \times 1 \times 1} = A \times D \times G$: y como las veces que P contiene al cubo C, es lo que se toma por volumen del paralelepípedo, será este volumen A × D × G; pero A es la altura, y D × G es la base: luego &ca.

El volumen de un cubo es igual á la tercera potencia de su lado: porque la superficie de su base es el cuadrado de su lado, y multiplicándola por la altura, igual tambien al lado, resultará la tercera potencia de este.

El volumen de un paralelepipedo oblicuángulo es igual á su base por su altura: porque es igual á un paralelepípedo rectángulo de igual base y áltura que él.

Prop. 134. *El volumen de un prisma triangular es igual á su base por su altura.*

Dem. Si el triángulo de la base se duplica formando un paralelogramo, y sobre este se construye un paralelepípedo, quedará dividido en dos prismas triangulares y simétricos, y por consiguiente iguales: luego el volumen de uno de ellos será la mitad del paralelepípedo, es decir, igual á su altura por la mitad de su base, ó por la base del prisma: luego &a.

El volumen de cualquier prisma es igual á su base por su altura: porque tirando planos de una arista á las opuestas, quedará dividido en prismas triangulares de igual altura; y valiendo cada uno el producto de su altura por su base, el volumen total será igual á la altura, factor comun, multiplicada por la suma de las bases ó por la base total del prisma.

Prop. 135. *El volumen de un cilindro es igual á su base multiplicada por su altura.*

Dem. Circunscribo á la base del cilindro un polígono regular, y construyo sobre él un prisma de igual altura que el cilindro. Sea S la base del cilindro: x el exceso del polígono sobre dicha base: será la base del prisma $S+x$. Sea U el volumen del cilindro: sea z el exceso del prisma sobre el cilindro: será $U+z$ el prisma: llamo A la altura, y será $U+z=AS+Ax$: y como x y z son disminuibles á voluntad, habrá ecuacion entre las constantes, y será $U=AS$: luego &a.

85. Si se divide la altura del tetraedro en partes iguales, y por los puntos de division se tiran planos paralelos á la base, construyendo sobre las secciones, que resulten, varios prismas, uno sobre cada seccion, circunscripto al tetraedro, y otro por la parte inferior, inscripto en el tetraedro truncado

siguiente, la diferencia entre la suma de los prismas inscriptos y la de los circunscriptos, es el prisma construido sobre la base inferior, y cuya altura sea la misma que la de los demas.

Porque cada prisma circunscripto debe ser igual al inscripto en la parte inferior de su base, por tener ambos igual base é igual altura: luego cada prisma circunscripto se desvanecerá en la resta con el inscripto sobre su misma base, y solo excederán los circunscriptos á los inscriptos en el prisma construido sobre la base inferior, que no tiene otro con que desvanecerse: luego &a.

Prop, 136. *Los tetraedros de igual base y altura son iguales.*

Dem. Sean T y t los tetraedros propuestos: y dividiendo sus alturas en un mismo número de partes iguales, tirando por los puntos de division planos paralelos á las bases, cada dos secciones correspondientes serán iguales, porque serán proporcionales á las bases que son iguales: luego los prismas circunscriptos en el primer tetraedro serán iguales á los correspondientes del 2.°; pues tendrán igual base y altura. Luego la suma de los prismas circunscriptos será la misma en ambos tetraedros. Sea x el exceso de la suma de los prismas circunscriptos al tetraedro T sobre el volumen de dicho tetraedro: será $T + x$ la suma de dichos prismas. Sea z el exceso de la suma de los prismas circunscriptos al tetraedro t sobre el volumen de dicho tetraedro: será la suma de dichos prismas $t + z$: y como ambas sumas son iguales, será $T + x = t + z$. Ahora x y z son disminuibles á voluntad: porque la suma de los prismas circunscriptos puede aproximarse cuanto se quiera á la de los inscriptos, y por tanto al tetraedro, que está entre las dos, dividiendo la altura en mayor número de partes, lo que disminuirá la altura del prisma construido sobre la base del tetraedro, el cual prisma es la diferencia entre ambas sumas: luego si $T + x$ y $t + z$ son iguales, despues de recibidos los aumentos, lo eran antes, y por tanto $T = t$: luego &a.

Prop. 137. *Todo tetraedro es la tercera parte de un prisma triangular de igual base y altura.*

144 Dem. Sea el tetraedro DABC; sobre sus aristas AB, BC, BD fórmese el prisma AE: quitándole el tetraedro, quedará la pirámide cuadrangular DACEF, que dividirémos con el plano CDF en dos tetraedros iguales, por tener sus vértices en un mismo punto, y ser sus bases mitades del paralelogramo AFEC. Tambien el tetraedro CFDE es igual al propuesto DABC, por tener ambos la misma altura que el prisma, y por bases las de este; luego los tres tetraedros son iguales, y uno de ellos, como DABC, es la tercera parte del prisma de igual base y altura.

El volumen de un tetraedro es el tercio de su altura multiplicado por el area de su base: pues es la tercera parte del prisma de igual base y altura.

El volumen de una pirámide es el tercio de su altura multiplicado por su base: pues dividiéndola en tetraedros con planos tirados desde una arista á las opuestas, estos tetraedros tendrán una misma altura; y siendo el volumen de cada uno el tercio de la altura por su base parcial, la suma de todos será el tercio de la altura, factor comun, multiplicado por la suma de sus bases ó por la base total.

Prop. 138. *El volumen de un cono es el tercio de su altura por su base.*

Dem. Circunscribo á la base del cono un polígono regular y construyo sobre este una pirámide, cuyo cúspide sea el del cono. Sea S la base del cono, x su diferencia al polígono circunscripto: este será igual á $S+x$: sea U el volumen del cono, z su diferencia á la pirámide circunscripta: esta será $S+z$; y como debe ser igual al tercio de su altura por la base, siendo A la altura del cono, será $U+z = \frac{1}{3}A(S+x)$ ó $U+z = \frac{1}{3}AS + \frac{1}{3}Ax$: y siendo z y x cantidades disminuibles á voluntad, dando mas lados al polígono circunscripto, los límites U y $\frac{1}{3}AS$ serán iguales: luego &a.

Sea R el radio de la base del cono, A su altura: su base será pR^2, y su volumen $\frac{1}{3}pAR^2$.

El volumen de un poliedro se halla dividiéndolo en pirámides, y sumando los volúmenes de estas.

Prop. 139. *El volumen de una pirámide truncada es el tercio de su altura, multiplicado por la suma de sus bases con una base media proporcional entre ellas.*

Dem. Sea A la altura del tronco, S y s las bases: sea x la altura de la pirámide parcial que falta al tronco para completar la pirámide. Siendo las bases S, s como los cuadrados de sus distancias al cúspide, será $S : s :: (A+x)^2 : x^2$ ó $\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{s}} = \frac{A+x}{x}$: luego $x = \frac{A\sqrt{s}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}}$, y $A+x = \frac{A\sqrt{S}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}}$: luego la pirámide total $= \frac{\frac{1}{3}AS\sqrt{S}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}}$, y la parcial $\frac{\frac{1}{3}As\sqrt{s}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}}$: y el tronco $\frac{1}{3}A \times \frac{S\sqrt{S}-s\sqrt{s}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}} = \frac{1}{3}A(S+s+\sqrt{Ss})$: luego &a.

En el cono truncado, siendo R el radio de la base superior y r el de la inferior, las areas de estas dos bases serán pR^2, pr^2: la base media proporcional será $\sqrt{pR^2 \times pr^2} = \sqrt{p^2 R^2 r^2} = pRr$: luego el volumen del cono truncado será $\frac{1}{3}A\ (pR^2 + pr^2 + pRr) = \frac{1}{3}Ap\ (R^2 + r^2 + Rr)$.

86. Prop. 140. *La sólidez de la esfera es igual al tercio del radio multiplicado por el area de la esfera.*

Dem. Circunscríbase al círculo máximo de la esfera un polígono regular, que girando al rededor del ege, formará un sólido compuesto de un cilindro, conos truncados y conos enteros. Circunscríbanse á estos, al cilindro un prisma, y á los conos pirámides: quedará la esfera rodeada de superficies planas tangentes á ella; y tirando por el centro y por las aristas planos, quedará el poliedro circunscripto dividido en pirámides, cuya altura comun será el radio de la esfera, y sus bases las caras del sólido: luego el volumen del poliedro será igual al tercio del radio multiplicado por su area.

Sea U el volumen de la esfera: x el exceso del poliedro sobre la esfera: S el area de la esfera, z el exceso del area del poliedro sobre la de la esfera: será $U + x$ el volumen del poliedro; y $S + z$ su area; y como multiplicada esta por $\frac{1}{3}R$, debe producir el volumen del poliedro, será $U + x = \frac{1}{3}SR + \frac{1}{3}zR$: como x y z pueden disminuir cuanto se quiera, aumentando indefinidamente los lados del polígono circunscripto al círculo máximo de la esfera, será $U = \frac{1}{3}RS$: luego &a.

Poniendo por S, $4pR^2$, será el volumen de la esfera $\frac{4}{3}pR^3$.

El volumen del segtor es el tercio del radio por el area de su casquete: pues debe estar contenido en el de la esfera tantas veces como la area, que le sirve de base, en la de la esfera. Y siendo el area del casquete $2pRx$, la sólidez del segtor será $\frac{2}{3}pR^2x$.

El volumen del segmento esférico se halla, res- 133
tando del segtor CDAG $= \frac{2}{3}pR^2x$, *el cono* CDIG $= \frac{1}{3}CI \times$ *area del circulo* DI. Ahora $CI = R - x$: area del círculo $DI = pDI^2$: pero $DI^2 = CD^2 - CI^2 = R^2 - R^2 + 2Rx - x^2$; luego el area del círculo $= p(2Rx - x^2) = px(2R - x)$, y el cono $\frac{1}{3}px(2R - x)(R - x) = \frac{1}{3}px(2R^2 - 3Rx + x^2)$. Restada del segtor, será el segmento $= \frac{1}{3}px(2R^2 - 2R^2 + 3Rx - x^2) = \frac{1}{3}px^2(3R - x)$.

Los poliedros circunscriptos á la esfera están con ella en la razon de sus areas: pues el tercio del radio es factor comun en sus volúmenes, y sus areas son los factores desiguales.

El volumen de la esfera es los $\frac{2}{3}$ del cilindro circunscripto: pues el area de la esfera es los $\frac{2}{3}$ de la del cilindro, y los volúmenes deben estar en la razon de las areas.

87. Prop. 141. *Los volúmenes de las pirámides semejantes son como los cubos de sus dimensiones homólogas.*

Dem. Las pirámides SABC, *Sabc* tienen por 121
volúmenes $\frac{1}{3}SH \times ABC$... y $\frac{1}{3}Sh \times abc$...: luego

$\frac{SACB}{Sabc} = \frac{SH}{sh} \times \frac{ABC\ldots}{abc\ldots}$: pero las bases ABC..., *abc*...á son como los cuadrados de sus alturas: luego $\frac{ABC\ldots}{abc\ldots} = \frac{SH^2}{Sh^2}$: sustituyendo será $\frac{SABC\ldots}{Sabc\ldots} = \frac{SH^3}{Sh^3}$: pero SH y S*h* son proporcionales á otras dos cualesquiera dimensiones homólogas: luego &a.

Prop. 142. *Los volúmenes de los poliedros semejantes son como los cubos de sus dimensiones homólogas.*

Dem. Sean P y *p* los poliedros; por ser semejantes, podrán dividirse en los tetraedros T, T′, T″... *t*, *t′*, *t″*... respectivamente semejantes: estos tetraedros serán como los cubos de dos líneas homólogas A y *a*: de modo que $\frac{T}{t} = \frac{A^3}{a^3}$, $\frac{T'}{t'} = \frac{A^3}{a^3}$, $\frac{T''}{t''} = \frac{A^3}{a^3}$ &a. Sumando los términos de estos quebrados iguales, será $\frac{T+T'+T''\ldots}{t+t'+t''\ldots} = \frac{A^3}{a^3}$: pero T + T′ + T″... = P, $t + t' + t''\ldots = p$: luego $\frac{P}{p} = \frac{A^3}{a^3}$; luego &a.

Prop. 143. *Los volúmenes de las esferas son como los cubos de sus radios.*

Dem. Sean R y *r* los radios de las dos esferas: sus volúmenes serán $\frac{4}{3}pR^3$, $\frac{4}{3}pr^3$; luego $\frac{\text{Esfera}}{\text{esfera}} = \frac{R^3}{r^3}$: luego &a.

Prop. 144. *Los volúmenes de los cilindros semejantes son como los cubos de sus generatrices.*

Dem. Sean A, *a* sus alturas, R, *r* los radios de sus bases: sus volúmenes serán pAR^2, par^2: luego $\frac{\text{Cil.}}{\text{cil.}} = \frac{A}{a} \times \frac{R^2}{r^2}$: pero en los cilindros semejjantes $\frac{A}{a} = \frac{R}{r}$: luego $\frac{\text{Cil.}}{\text{cil.}} = \frac{R^3}{r^3}$: y siendo los radios de las bases como las generatrices, serán los cilindros como los cubos de las generatrices.

Prop. 145. *Los volúmenes de los conos semejantes son como los cubos de sus generatrices.*

Dem. Sean A, a sus alturas, pR^2, pr^2 sus bases: será $\frac{\text{Cono}}{\text{cono}} = \frac{A}{a} \times \frac{R^2}{r^2}$; pero $\frac{A}{a} = \frac{R}{r}$: luego $\frac{\text{Cono}}{\text{cono}} = \frac{R^3}{r^3}$ ó como los cubos de las generatrices.

Prop. 146. *Los poliedros simétricos son iguales en volumen.*

Dem. Descompuestos los poliedros simétricos en tetraedros, estos serán simétricos respectivamente: y teniendo iguales bases y alturas cada dos tetraedros, tendrán igual volumen: luego los poliedros serán tambien iguales en volumen.

FIN DE LA GEOMETRÍA.

APLICACION

del álgebra á la geometría.

88. Representando con letras las distancias dadas y buscadas entre los varios puntos de una figura, y á veces tan solamente las relaciones de dichas distancias, se reducen los problemas de geometría á la forma de ecuaciones algébraicas, dependientes de las propiedades necesarias de la figura y de las condiciones particulares del problema: de ellas se deduce por los métodos enseñados en el álgebra el valor de la incógnita ó incógnitas; y la forma, en que se presentan, simboliza las operaciones geométricas, que deben hacerse para determinarlas *graficamente*, que es lo que se llama *construir las fórmulas.* Así se aplica el álgebra á la geometría.

En las soluciones se prefiere, segun los fines á que se dirigen, la mayor facilidad de establecer la ecuacion, ó la mayor comodidad y sencillez de la fórmula, ya para la construccion ó ya para el cálculo numérico. No siempre se consigue esta mayor facilidad y sencillez, que es lo que constituye la *elegancia* de la solucion: pero, puesto el problema en ecuacion, es seguro hallar espresiones de las incógnitas, mas ó menos fáciles de construir; cuando seria contingente atinar con su determinacion gráfica, valiéndose solo de consideraciones geométricas.

Todos los problemas, que se reducen á ecuaciones de 1.° y 2.° grado, se pueden construir sin valerse de otras líneas, que el círculo y la recta.

Á veces los datos y las incógnitas no son distancias, ni razones de distancias, sino productos de dos de ellas, ó de tres, como en los volúmenes, y aun de cuatro, cinco &a.: pero atendiendo al número de dimensiones de cada dato ó incógnita, las ecuaciones han de ser homogéneas: es decir, que en cada término ha de entrar igual número de factores: sino, una línea resultaria igual al producto de dos ó mas, lo que es absurdo. Esta condicion falta, al parecer, cuando alguna de las distancias ó productos se ha tomado por unidad: pero se establece la homogeneidad haciendo la unidad igual á una letra, y multiplicando ó dividiendo los términos, que convenga, por potencias de aquella letra. Por egemplo, la ecuacion $a^2x - b = cx - d^3$, se hará homogénea, haciendo $1 = r$ y multiplicando $- b$ por r^2, y cx por r, y será $a^2x - br^2 = crx - d^3$.

De aquí se infiere, 1.° que si x representa una distancia, y su valor algébraico es un polinomio, no puede ser otra cosa, que la suma ó diferencia de varias líneas, representadas por los términos del polinomio: 2.° si el valor de x es fraccionario, debe tener en su numerador un factor mas que en su denominador, para que despejando de quebrados, resulte la ecuacion homogénea: 3.° si el valor de x es un radical de 2.° grado, la cantidad, que esté debajo, debe tener dos factores, para que elevando al cuadrado ambos miembros, resulte la ecuacion homogénea.

89. *Construir un polinomio.*

Sea $x = a + b - c + d - h$. Sobre una misma recta tómense las líneas positivas a, b, d, á continuacion unas de otras. Quítesele á la línea, que resulta, la suma de las rectas c y h, y el residuo será el valor de x.

Construir un valor fraccionario.

Hay varios casos. 1.° Siendo los dos términos monomios. La fórmula mas sencilla para este caso es $x = \frac{ab}{c}$, de donde $c : a :: b : x$. Búsquese una cuarta proporcional á c, a, y b, y dicha cuarta proporcional será el valor de x.

Si $x = \frac{abc}{de}$, hagase $\frac{ab}{d} = k$, y será $x = \frac{kc}{e}$. Busco, pues, una cuarta proporcional á d, a y b, y tendré el valor de k: busco despues otra cuarta proporcional á e, k y c, y tendré el valor de x.

Si $x = \frac{abcd}{efg}$, hago $\frac{ab}{e} = k$, $\frac{cd}{f} = l$, y será $x = \frac{kl}{g}$.

Se reduce el problema á buscar tres cuartas proporcionales.

2.° Si el numerador es polinomio, como $x = \frac{abc + def - ghi}{lm}$, se descompone en fracciones, y es $x = \frac{abc}{lm} + \frac{def}{lm} - \frac{ghi}{lm}$. Se construye cada fraccion aparte, y despues se suman ó restan las líneas que resulten. Si $x = \frac{a^2 - c^2}{b}$, descomponiendo el numerador en sus factores, es $x = \frac{(a+c)(a-c)}{b}$, y se buscará una cuarta proporcional á b, $a + c$ y $a - c$.

3.° Si el denominador es polinomio, se iguala á un monomio, cuyos factores sean todos conocidos menos uno. Por egemplo, si $x = \frac{abc + def}{ab + cd}$, hago

$ab + cd = ak$, de donde $k = b + \frac{cd}{a}$, que se sabe construir: el valor de x será $\frac{abc + def}{ak} = \frac{bc}{k} + \frac{def}{ak}$, que se sabe construir, conocida k.

$x = \frac{abc^2 + q^3h - m^3p}{q^2i - klq + cmd}$. Sea $q^2i - klq + cmd = q^2z$, de donde $z = i - \frac{kl}{q} + \frac{cmd}{q^2}$, y $x = \frac{abc^2 + q^3h - m^3p}{q^2z} = \frac{abc^2}{q^2z} + \frac{qh}{z} - \frac{m^3p}{q^2z}$.

$x = \frac{abc^2 - a^2b^2}{abc + c^3}$ se construye fácilmente, haciendo $\frac{ab}{c} = m$, de donde $ab = cm$, y $x = \frac{c^3m - c^2m^2}{c^2m + c^3} = \frac{cm - m^2}{m + c} = \frac{m(c - m)}{m + c}$, una cuarta proporcional.

90. *Construir un radical.*

1.° $x = \sqrt{ab}$ es una media proporcional entre a y b.

2.° $x = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos lados son a y b.

3.° $x = \sqrt{(a^2 - b^2)}$ es un lado de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es a y el otro lado b.

En las fórmulas complicadas se igualará la cantidad, que está debajo del radical, al producto de dos factores, uno conocido y el otro desconocido, y se buscará una media proporcional entre ambos.

Egemplos.

$x = \sqrt{\frac{ab^2 + cd^2}{b + c}}$, hago $\frac{ab^2 + cd^2}{b + c} = ak$, de donde

$k = \frac{b^2}{b+c} + \frac{}{a(b+c)}$. El valor de k se determina buscando una tercera y dos cuartas proporcionales. La media proporcional entre k y a es el valor de x.

Si $x = \sqrt{(ac - fg + mq + rd)}$, hago $ac - fg + mq$ $rd = ak$ de donde $k = c - \frac{fg}{a} + \frac{mq}{a} + \frac{rd}{a}$, y $x = \sqrt{ak}$.

Si $x = \sqrt{(a^2 - f^2 \cdot \frac{c^2 + d^2}{ab + cd})}$, hago $c^2 + d^2 = k^2$ (k es una hipotenusa) $ab + cd = l^2$, y será $x = \sqrt{(a^2 - \frac{f^2 k^2}{l^2})}$: hago $\frac{fk}{l} = t$, 4.ª proporcional, y será $x = \sqrt{(a^2 - t^2)}$, lado de un triángulo rectángulo.

Ultimamente si $x = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots)}$, hago $a^2 + b^2 = z^2$ (z es una hipotenusa): hago $z^2 + c^2 = y^2$ (y es otra hipotenusa): y resulta $x = \sqrt{(y + d^2 + \ldots)}$ En quedando debajo del radical dos cuadrados, x será una hipotenusa.

$\sqrt{n}$ se puede construir buscando una media proporcional entre 1 y n; la espresion $\sqrt{2}$, ó buscando una media proporcional entre 1 y 2, ó la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos lados valgan 1 cada uno.

91. Toda espresion de dos dimensiones representa un area. Iguálese al cuadrado x^2, constrúyase la x, y el cuadrado construido sobre esta línea será = á la area espresada por la fórmula.

Egemplo. La espresion $\frac{cd^2+a^2c}{m+n}$, que representa un area, iguálese á x^2 y será $x = \sqrt{\frac{cd^2+a^2c}{m+n}}$. Construyo este valor de x; y el cuadrado formado sobre él será $= \frac{cd^2+a^2c}{m+n}$.

Últimamente, si la espresion es el producto de tres factores, representará un volumen, como $\frac{a^3b+cd^3}{m-n}$. Hago esta espresion $= ax^2$, siendo a conocida, de donde $x = \sqrt{\frac{a^3b+cd^3}{a(m-n)}}$. Hallado el valor de x, ax^2 ó la espresion propuesta representará un paralelepípedo, cuya altura es a, y cuya base es un cuadrado que tenga por lado á x.

Teoria de los signos en la analisis geométrica.

92. Cuando dos figuras no se diferencian sino en el tamaño de sus partes, y estas están colocadas en ambas en un mismo sentido, se dice que las figuras están en correlacion directa. La ecuacion que ligue entre sí las partes de dichas figuras debe ser la misma para ambas; pues son casos particulares de una misma cuestion.

Cuando dos figuras están entre sí combinadas de tal manera, que una parte es en la una la suma de dos líneas, y en la otra es la diferencia de las mismas líneas, se dice que las figuras están en *correlacion indirecta*: y las ecuaciones, que las representen, deben diferenciarse en el signo de la línea, que es sumando en la una y substrahendo en la otra. Las líneas, que se añaden en una figura y se restan en la otra, y que por consiguiente varían de signo en la ecuacion, se llaman *indirectas.* Para abreviar la frase, se suelen llamar las figuras directas ó indirectas, segun su correlacion.

145 Sea el triángulo ABC cuya altura BD cae dentro de la base; y sea el triángulo A'B'C', cuya altura B'D' caiga fuera. Comparando entre sí estas dos figuras, son indirectas, porque la distancia del vértice A á la perpendicular en la 1.er figura es = á la base AC menos el segmento CD; y en la 2.a la distancia del vértice correspondiente A' á la perpendicular es igual á la base A'C' mas el segmento C'D'. Este segmento, que es substrahendo en la 1.er figura y sumando en la segunda, es la cantidad indirecta.

Una misma ecuacion puede servir para dos figuras indirectas, variando el signo, en la ecuacion hallada para la primer figura, á las cantidades que se hacen indirectas en la segunda.

Cuando de la resolucion de un problema geométrico resulta un valor negativo de la incógnita x, se muda el signo de esta en la ecuacion, y se tendrá la condicion á que satisface dicho valor negativo. Entónces se conocerán las líneas que se hacen indirectas en el problema, para que el valor negativo de x, hecho positivo, lo satisfaga.

93. Si la x representa una parte, que se debe tomar sobre una recta desde un punto fijo, el valor negativo satisface al problema, tomándolo desde dicho punto fijo hácia la parte opuesta á aquella en que se hubiera tomado, si la x hubiera sido positiva.

146 Porque sea A el punto fijo, y sea la incógnita

x la distancia de A á B, quedando este punto B determinado por una condicion establecida, sobre la cual se funda la ecuacion. Sea C otro punto cualquiera fijo tomado en la línea. Cuando el punto B está á la derecha de A, es $CB = CA + AB$: cuando está á la izquierda, es $CB' = CA - AB'$: luego AB es cantidad indirecta, y su signo debe mudar de un caso para otro: luego el valor negativo de x debe interpretarse tomándolo á la izquierda del punto A. La analisis dá negativo este valor, por la absurdidad que se ha cometido en la figura hipotética, que nos ha servido para formar la ecuacion: pues en dicha figura hemos puesto el punto buscado B á la derecha de A, debiendo estar á la izquierda, segun lo ha hecho conocer el cálculo, dando negativo el valor de x.

Toda cantidad variable que de directa se hace indirecta, se hace igual á cero ó igual al infinito en el valor intermedio.

Dem. Si la cantidad x se hace indirecta, será sumando antes y substrahendo despues; de modo que habrá dos cantidades a y b tales que $a = b + x$, cuando x es directa, y $a = b - x$, cuando es indirecta. En el primer caso $x = a - b$, en el 2.° $x = b - a$: luego en el primer caso a era mayor que b y en el 2.° menor: luego en el intermedio ha habido un caso en que $a = b$, y $x = 0$.

Puede suceder que el valor de x se determine por una fórmula de esta especie $x = \frac{A}{a-b}$, y entónces en el caso intermedio en que $a = b$, será $x = \infty$; luego &a.

Problemas geométricos de 1.° y 2.° grado.

94. 1.° *Dadas dos paralelas, y un punto, tirar por él una oblicua tal, que su parte interceptada entre las paralelas tenga una magnitud determinada.*

147 Sean las paralelas dadas DE, FG, y C el punto dado. Se conoce la distancia de C á FG; la distancia BA entre las paralelas, y la parte de la oblicua cogida entre ellas, que llamo c. Sea $CA = a$, $BA = b$. Supongo que la oblicua CX es la que busco: será preciso conocer la $AX = x$, y la XU será $= c$. Los triángulos semejantes CAX, CUB dán BA : CA :: XU : XC ó $b : a :: c : CX = \frac{ac}{b}$. En el triángulo rectángulo CXA es $CX = \surd(CA^2 + AX^2) = \surd(a^2 + x^2)$. Igualando los valores de CX, es $\surd(a^2 + x^2) = \frac{ac}{b}$. Elevo al cuadrado y es $a^2 + x^2 = \frac{a^2c^2}{b^2}$ y $x^2 = \frac{a^2c^2}{b^2} - a^2 = \frac{a^2c^2 - a^2b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2}(c^2 - b^2)$, y $x = \pm\frac{a}{b}\surd(c^2 - b^2)$. Se vé, pues, que el problema es imposible cuando c es menor que b, ó la oblicua UX menor que la perpendicular BA. Cuando $c > b$, construyamos el radical $\surd(c^2 - b^2)$, que es un cateto de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es c y el otro lado b. Para esto hago centro en B con un radio $= c$, y señalaré en la FA el punto T. El lado AT es el cateto pedido. Busco despues una 4.ª proporcional á b, $\surd(c^2 - b^2)$ y a, lo que se hace

tirando por C la CX paralela á BT: y AX será la 4.ª proporcional, y CX la oblicua pedida.

El valor negativo se interpreta, tomándolo á la derecha del punto A, y tirando la CX′: pues la x es una parte que debe tomarse siempre sobre la FG desde el punto fijo A. El problema admite pues dos soluciones. Si $c = b$, $x = 0$, y la perpendicular CA seria la recta que se pide.

2.ª *Dado un círculo y un punto, tirar por él una cuerda de una longitud determinada.*

Sea el círculo AEBD, cuyo radio $OB = r$. Por el punto C dado tiro el diámetro ACB, y como la posicion del punto C es conocida, lo será su distancia CO al centro. Sea $CO = b$, será $AC = AO - CO = r - b$, y $CB = CO + OB = r + b$. Sea la cuerda que se pide CDE, y llamo $CD = x$, será $CE =$ á toda la cuerda $- x$. Sea c la longitud, que debe terner toda la cuerda; será $EC = c - x$. Como las cuerdas se cortan en partes reciprocamente proporcionales, será $CD \times CE = CA \times CB$, ó $cx - x^2 = r^2 - b^2$. Hago $r^2 - b^2 = q^2$, será $cx - x^2 = q^2$, $x^2 - cx = -q^2$: $x = \frac{1}{2}c \pm \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 - q^2)}$. Ahora q siendo $= \sqrt{(r^2 - b^2)} = \sqrt{(r + b)(r - b)}$, es media proporcional entre AC y CB: luego es la OC perpendicular al diámetro en C. El radical $\sqrt{(\frac{1}{4}c^2 - q^2)}$ es un cateto de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es $\frac{1}{2}c$ y el otro lado q. Hago, pues, centro en O con un radio $= \frac{1}{2}c$, y señalaré en el diámetro el punto M. El cateto CM es el valor de $\sqrt{(\frac{1}{4}c^2 - q^2)}$. Para añadirlo á la semicuerda OM, 148 tomo en su prolongacion $MT = CM$; y OT será el valor de $x = \frac{1}{2}c + \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 - q^2)}$. Hago centro en C con el radio OT, y me señalará el punto X del círculo por donde debe pasar la cuerda pedida.

El otro valor de $x = \frac{1}{2}c - \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 - q^2)}$ es el otro segmento de la cuerda CX': pues la suma de estos dos valores es c ó toda la cuerda. Haciendo centro en C con el radio CX' señalaré otro punto z del círculo por el cual podré tirar otra cuerda zCZ, que será $= c$, y que dará otra solucion del problema.

Si q es mayor que $\frac{1}{2}c$, el problema es imposible. En efecto, entónces la cuerda Oo seria mayor que XX', lo que no puede ser, pues esta dista del centro menos que Oo, lo que es evidente, siendo mu menor que mC.

Si $q = \frac{1}{2}c$, la cuerda es la Oo.

Si c es igual al diámetro, $\frac{1}{2}c = r$, y $x = r \pm \sqrt{(r^2 - q^2)}$; y siendo $q^2 = r^2 - b^2$, $x = r \pm b$. Los dos valores de x son los dos segmentos del diámetro, y no hay mas que una solucion, que es el diámetro.

149 La siguiente construccion es mas elegante. Inscribo en el círculo dado la cuerda $FH = c$. Por el punto C hago pasar un círculo concéntrico al dado, que cortará la FH en T y en R. Los dos valores de x serán TF y TH. Porque $OD^2 = OF^2 - FD^2 = r^2 - \frac{1}{4}c^2$: y $TD^2 = OT^2 - OD^2 = b^2 - r^2 + \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}c^2 - q^2$: luego $TD = \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 - q^2)}$: $FT = \frac{1}{2}c - \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 - r^2)}$, y $TH = \frac{1}{2}c + \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 - r^2)}$. Si $b = OD = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}c^2)}$,

$= \frac{1}{2}c$, y el problema solo tendría una solucion, porque FH sería tangente del círculo interior. Si $r > \frac{1}{2}c$, ó $b < \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}c^2)}$, el problema es imposible: porque dicho círculo y la FH no se cortarán ni tocarán.

Se vé ademas, que haciendo centro en C con el radio FT y señalado el punto X en el círculo dado, la cuerda XX′ debe ser = FH. Porque siendo iguales los triángulos OTF, OCX, será el ángulo X = F; y en los triángulos OFD, OXL, en que los ángulos son iguales, y OX = OF, será OL = OD, y las cuerdas XX′, FH, equidistantes del centro, serán iguales.

95. *3.° Dado un diámetro y una cuerda perpendicular a él, tirar desde un estremo del diámetro una recta tal, que la parte comprendida entre la cuerda y su arco tenga una magnitud determinada.*

Sea BO la cuerda dada, AD el diámetro dado: 150
es evidente que AO será conocida; hágola $= p$. Sea AH la recta, que se pide, tal, que TH $= m$. Sea AH $= u$, AT $= x$; será $u - x = m$. Tirada la OH, los triángulos HAO y TAO tienen el ángulo en A comun y el ángulo AOT = H, porque sus medidas son las mitades de los arcos iguales AB, AO: luego $\frac{AH}{AO} = \frac{AO}{AT}$, y $ux = p^2$. Conocida la diferenoia y el producto de dos cantidades, dichas cantidades serán $u = \frac{1}{2}m \pm \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + p^2)}$, $x = -\frac{1}{2}m \pm \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + p^2)}$ (Álgebra art. 14. III). Los valores superiores son positivos; los inferiores son negativos: y

mudando el signo á las incógnitas en la ecuacion fundamental, es $x - u = m$, lo que prueba que la x debe ser mayor que la u, lo que no puede verificarse, sino en el caso de que la AH corte á la BO fuera del círculo, como se vé tambien por el valor de x: pues $\frac{1}{2}m + \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + p^2)}$ debe ser mayor que p, y en este caso la AT se separa mas de la perpendicular que la AO. Ahora bien, estando el punto T fuera del círculo, ni la u ni la x se hacen indirectas, sino la m; porque en el primer caso $x + TH = u$, y en el segundo $x - TH = u$.

La construccion para ambos casos es la siguiente. Levanto en O á la AO la perpendicular OU $= \frac{1}{2}m$, tiro la $AO = \sqrt{(p^2 + \frac{1}{4}m^2)}$: prolóngola hasta que $UM = \frac{1}{2}m$. Será AM el valor de u para el 1.er caso y el de x para el 2.°: haciendo centro en A con el radio AM, y describiendo un arco, los puntos en que corte al círculo y á la cuerda BO prolongada, serán los puntos adonde deben tirarse las rectas que llenen la condicion del problema. Obsérvese, que á la izquierda del diámetro dá otras dos soluciones iguales á las primeras, y que no están simbolizadas en la ecuacion, que siendo del 2.° grado, dá solamente dos soluciones.

Si $m > CD$, no cortará el arco TH al círculo, y no habrá mas soluciones, que las esteriores. Si $UM = \frac{1}{2}m$ se añade á AU, dá la solucion interior; y si se le resta, es decir, si se hace la m indirecta, dará el valor de u para la solucion esterior.

96. 4.° *Buscar en una recta un punto, cuyo*

distancias á dos puntos dados en la misma recta formen un rectángulo igual á un cuadrado dado m^2.

Sean los dos puntos fijos A y C, y B' el punto pedido. Sea $AC = a$, $AB' = x$, $CB' = a - x$, 146
y la ecuacion es $ax - x^2 = m^2$: $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - m^2)}$. La construcion es fácil. Si $m = \frac{1}{2}a$, $x = \frac{1}{2}a$, y el punto pedido está en la mitad de la recta.

Si $m < \frac{1}{2}a$, los dos valores de x suman a, y por tanto el problema tiene dos soluciones indicadas por la ecuacion en dos puntos tomados entre A y C á igual distancia de ellos. Tambien podrán hallarse dos puntos á igual distancia de A y C, tomados fuera de la recta, que satisfagan á la misma condicion: mas no resultarán de la ecuacion propuesta: sino de $x\,(x + a) = m^2$, de donde $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + m^2)}$: porque si es B el punto esterior, $AB = x$, $CB = x + a$. Vease un problema con cuatro soluciones, cuando la ecuacion no dá mas que dos.

Si $m > \frac{1}{2}a$, el radical es imaginario en la 1.er ecuacion, mas no en la segunda: luego se pueden tomar dos puntos fuera de la recta, que satisfagan á la cuestion: el problema tendrá, pues, dos soluciones, á pesar de que el radical resulta imaginario. Luego la absurdidad de los valores imaginarios de la incógnita no es absoluta siempre, sino relativa, como la absurdidad de los valores negativos.

5.° *Dadas dos paralelas, y una perpendicular* *á entrambas, tirar una secante entre ellas tal, que la mitad de la perpendicular sea media proporcional entre las dos partes de ambas paralelas comprendidas entre la perpendicular y la secante.*

151 Sean las paralelas AE′, BF y AB la perpendicular y EF la secante. Sea la mitad de AB $= a$; AE $= x$, BF $= y$: la ecuacion es $xy = a^2$; el problema es indeterminado, pues tiene una ecuacion con dos incógnitas. Para obtener las infinitas soluciones de este problema, tiro la CD paralela á las dos y por el punto de su encuentro con la secante imaginando la II′ paralela á AB, los triángulos EDI, I′DF serán semejantes, y por ser DI $=$ DI′, iguales: luego BF $=$ CD $+$ IE, ó llamando á CD, r, $y = r +$ IE, $x = r -$ IF: luego sumando $x + y = 2r$. Elímino la y de esta ecuacion y de $xy = a^2$, y tendré $x^2 - 2rx = -a^2$: $x = r \pm \sqrt{(r^2 - a^2)}$. Tómese, pues, r mayor que a, y arbitraria: haciendo centro en D con el radio r, los puntos de interseccion del círculo con las dos paralelas, darán las dos soluciones EF, E′F′: porque, siendo EI $= \sqrt{(r^2 - a^2)}$, será AE $= r - \sqrt{(r^2 - a^2)}$, y AE′ $= r + \sqrt{(r^2 - a^2)}$. Á cada nuevo centro que se tome, describiendo un nuevo círculo con la distancia del centro á la AB por radio, sus intersecciones con las paralelas darán siempre dos soluciones.

Esta construccion pudiera deducirse de consideraciones puramente geométricas; pues todo círculo, cuyo centro esté en la CD y que toque á la AB, ha de verificar la condicion del problema. En efecto, la tangente AC es media proporcional entre la secante AE′ y su parte esterna AE, que es $=$ BF′ porque la igualdad de los triángulos DEI, DF′I′ dá IE $=$ I′F′, y por tanto AE $=$ BF′.

FIN DE LA APLICACION DEL ÁLGEBRA Á LA GEOMETRÍA.

TRIGONOMETRIA RECTILÍNEA.

97. La trigonometría rectilínea es un ramo de la geometría, cuyo objeto es resolver este problema: *dadas tres de las seis cosas, que contiene un triángulo, á saber; los tres lados y los tres ángulos, determinar las otras tres.* Este problema admite infinitas soluciones en el caso de darse los tres ángulos: pues todos los triángulos, semejantes á uno dado, tienen los mismos ángulos que él, y sin embargo sus lados son desiguales.

152 Un ángulo de un triángulo queda determinado siempre que se conozca el lado opuesto y el diámetro del círculo circunscripto al triángulo: porque si este diámetro es BC, y BD el lado opuesto al ángulo, que se busca, dicho ángulo será $=$ C. Y aun no es menester para conocer dicho ángulo conocer el lado opuesto y el diámetro: basta conocer la razon de estas dos líneas: pues el ángulo C será $= c$, aunque los lados opuestos y los diámetros sean diferentes, siempre que $\frac{BD}{BC} = \frac{bd}{bc}$.

Por los triángulos semejantes BCD, BOQ (siendo OQ perpendicular á BD), es $\frac{BD}{BC} = \frac{BQ}{BO}$: es decir, será conocido el ángulo BOQ $=$ C, siempre que se conozca la relacion de la perpendicular BQ al radio: está relacion se llama seno del ángulo BOQ.

Tambien quedará determinado dicho ángulo, siendo conocida la razon $\frac{HU}{BO}$, y la razon $\frac{OU}{BO}$, siemdo HU tangente en H. La primera de estas razones se llama tangente y la 2.ª secante.

Como el ángulo BOQ quedará determinado, si lo está su complemento BOR, y este puede determinarse, ó por su seno $\frac{OT}{BO}$, ó por su tangente $\frac{RS}{BO}$, ó por su secante $\frac{OS}{BO}$, se infiere que cualquiera de estas tres relaciones servirá para determinar el ángulo BOQ. El seno del complemento $\frac{OT}{BO}$, se llama coseno del ángulo BOQ; la tangente del complemento, cotangente; y la secante del complemento, cosecante del mismo ángulo.

Estas relaciones se llaman, aunque no con mucha propiedad, *líneas trigonométricas*. Mejor las llama Carnot en su geometría de posicion *cantidades líneo-angulares*: porque son relaciones entre líneas, que determinan el valor de los ángulos.

Para hallar estas relaciones, no hay mas que hacer el radio $=1$; el valor analítico, que entónces tomen las rectas BQ, HU, OU, OT, RS, OS, serán las fórmulas del seno, tangente, secante, coseno, cotangente y cosecante.

Si dichas fórmulas se hacen homogéneas, tendrémos los valores analíticos de dichas rectas en el círculo, cuyo radio tenga un valor cualquiera.

En lo succesivo supondremos siempre el radio $=1$, y las rectas citadas serán las relaciones ó cantidades líneo-angulares, cuyo uso principal consiste en la determinacion de los ángulos.

98. *Dado el seno de un arco, hallar las demas líneas trigonométricas.*

Sea el radio $OH = 1$, el arco $HB = a$. En la triángulo rectángulo OQB es $OB^2 = OQ^2 + BQ^2$ ó $1 = \text{sen}^2.\ a + \cos^2.\ a$, por ser $OQ = BT$. De esta fórmula sale $\cos.\ a = \pm\sqrt{(1 - \text{sen}^2.\ a)}$.

Los triángulos OQB, OHU dán estas dos proporciones, $\frac{OQ}{QB} = \frac{OH}{HU}$, y $\frac{OQ}{OB} = \frac{OH}{OU}$ ó $\frac{\cos\ a}{\text{sen}.\ a} = \frac{1}{\text{tang}.\ a}$, y $\cos.\ a = \frac{1}{\sec.\ a}$, de donde sale la tangente y la secante, $\text{tang}.\ a = \frac{\text{sen}.\ a}{\cos.\ a}$ y $\sec.\ a = \frac{1}{\cos.\ a}$.

Los triángulos OTB, ORS semejantes dán $\frac{OT}{TB} = \frac{OR}{RS}$, y $\frac{OT}{OB} = \frac{OR}{OS}$ ó $\frac{\text{sen}.\ a}{\cos.\ a} = \frac{1}{\cot.\ a}$, y $\text{sen}.\ a = \frac{1}{\text{cosec}.\ a}$ de donde $\cot.\ a = \frac{\cos.\ a}{\text{sen}.\ a}$, y $\text{cosec}.\ a = \frac{1}{\text{sen}.\ a}$.

Dada una línea trigonométrica, determinar las demas.

En las fórmulas $\text{sen}^2.\ a + \cos^2.\ a = 1$, $\text{tang}.\ a = \frac{\text{sen}.\ a}{\cos.\ a}$, $\cot.\ a = \frac{\cos.\ a}{\text{sen}.\ a}$, $\sec.\ a = \frac{1}{\cos\ a}$, $\text{cosec}.\ a = \frac{1}{\text{sen}.\ a}$, conocida una línea trigonométrica, tendremos cinco incógnitas: y como son cinco las ecuaciones, se podrán hallar sus valores.

Egemplo. Dada la tangente, determinar las demas líneas trigonométricas.

Para determinar el seno, despejo $\cos.\ a$ en la 2.ª ecuacion y es $\cos.\ a = \frac{\text{sen}.\ a}{\text{tang}.\ a}$, y pongo su valor en la 1.ª ecuacion, y será $\text{sen}^2.\ a + \frac{\text{sen}^2.\ a}{\text{tang}^2.\ a} = 1$. Despejo de quebrados y es $\text{sen}^2.\ a \times \text{tang}^2.\ a + \text{sen}^2.\ a$

$= \tan^2. a$, de donde $\text{sen}^2. a = \frac{\text{tang}. a}{\sqrt{(1+\text{tang}^2. a)}}$.

Para determinar el coseno, despejo el seno en la 2.ª ecuacion, y es $\text{sen}. a = \text{tang}. a \times \cos. a$, y pongo su valor en la primera, y es $\text{tang}^2. a \times \cos^2. a + \cos^2. a = 1$, de donde $\cos. a = \frac{1}{\sqrt{(1+\text{tang}^2. a)}}$.

La secante, cotangente y cosecante se determinan poniendo en sus fórmulas en lugar de seno y coseno sus valores: y será $\sec. a = \sqrt{(1 + \text{tang}^2. a)}$, $\text{cotang}. a = \frac{1}{\text{tang}. a}$, $\text{cosec}. a = \frac{\sqrt{(1^2 + \text{tang}^2. a)}}{\text{sen}. a}$.

99. Los matemáticos consideran toda circunferencia dividida en 360 partes iguales, que llaman grados: cada grado en 60 partes iguales, que llaman minutos, cada minuto en 60 partes iguales, que llaman segundos, &a. Estas divisiones se espresan con los signos °, ′, ″, &a. Estas divisiones indican la parte que cada arco es de su circunferencia; y por consiguiente los arcos semejantes deben tener un mismo número de grados, con la diferencia de que en el arco menor el grado es menor, á proporcion de su radio. El ángulo se mide por el número de grados, que abraza su arco, sea cual fuere la magnitud del radio.

Cuando el arco es nulo, ó $a = 0$, su seno es nulo: haciendo, pues, $\text{sen}. a = 0$ en las fórmulas anteriores, resulta $\cos. a = \pm 1$; tomarémos el signo $+$, pues vemos que el coseno se toma á la derecha del centro: $\text{tang}. a = 0$, $\text{cotang}. a = \infty$, $\sec. a = 1$, $\text{cosec}. a = \infty$.

Aumentando el arco desde 0 hasta 90°, aumentan seno, tangente y secante y disminuyen coseno, cotangente y cosecante.

153 Cuando $a = 30^\circ$, su seno DB es mitad de la cuerda DO del arco doble ó de 60°: pero la cuerda de 60° es igual al radio, por ser el lado del exágono inscripto: luego el seno de 30° es igual á la mitad del radio, ó sen. $30^\circ = \frac{1}{2}$. De donde cos. $30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

El seno de $60^\circ =$ cos. $30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, y cos $60^\circ = \frac{1}{2}$: tang. $30^\circ = \frac{\text{sen. } 30^\circ}{\text{cos. } 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, y cotang. $30^\circ = \sqrt{3}$. Tambien tang. $60^\circ = \sqrt{3}$ y cotang. $60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Si el arco es de 45°, el seno será igual al coseno: por tanto la ecuacion $\text{sen}^2.\, a + \cos^2.\, a = 1$, se convertirá en $2\,\text{sen}^2.\, a = 1$, $\text{sen}^2.\, a = \frac{1}{2}$, y sen. $45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Tambien cos. $45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$: tambien tang. $45^\circ =$ cotang. $45^\circ = 1$, es decir, igual al radio.

Cuando el arco es de 90°, su seno es el radio, ó 1. Sustituyendo en las cinco fórmulas, será cos. $90^\circ = 0$, tang. $90^\circ = \infty$, sec. $90^\circ = \infty$, cotang. $90^\circ = 0$, cosec. $90^\circ = 1$.

Desde los 90° hasta los 180°, el seno, tangente y secante disminuyen: el coseno, la cotangente y la cosecante aumentan. El seno conserva el mismo signo que en el primer cuadrante: pero el coseno, la tangente y la cotangente se hacen indirectas, y toman el signo negativo.

Cuando el arco es de 180°, su seno es 0: y sustituyendo este valor en las cinco fórmulas, se tendrá cos. $180^\circ = - 1$ (tomo el signo $-$, porque en pasando de 90° el arco, el coseno es indirecto): tang. $180^\circ = 0$: cotang. $180^\circ = - \infty$: sec. $180^\circ = + 1$: cosec. $180^\circ = \infty$.

Las líneas trigonométricas de un arco son iguales á las de su suplemento.

Dem. Sea el arco AB. Si por B tiro BM paralela al diámetro, será el arco ABM suplemento de MD: pero MD = AB por comprendidos entre paralelas; luego ABM es suplemento de AB: sus senos BC, MA′ son iguales por paralelas entre paralelas: pero en siendo el seno igual, sustituido en las cinco fórmulas dará igual el valor de cada una de las otras líneas trigonométricas: luego &a. 154

100. *En todo triángulo rectángulo un lado es igual á la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto al lado, ó por el coseno del ángulo adyacente al lado.*

Sea el triángulo ABC. Sea AM el radio, MO el arco que mide el ángulo A, y MT su seno. Los triángulos semejantes AMT, ABC dán $\frac{BC}{AB} = \frac{MT}{MA} = \frac{\text{sen. A}}{1}$: luego BC = BA x sen. A: pero sen. A = cos. C, por ser A y B complemento el uno del otro: luego tambien BC = BA x cos. B: luego &a. 155

En todo triángulo rectángulo un lado es igual al otro multiplicado por la tangente de su ángulo adyacente. Porque en el triángulo rectángulo ABC, tenemos BC = AB x sen. A, y AC = AB x cos. A: partiendo será $\frac{BC}{AC} = \frac{\text{sen. A}}{\text{cos. A}}$; pero $\frac{\text{sen. A}}{\text{cos. A}}$ es tang. A, luego $\frac{BC}{AC}$ = tang. A, y BC = AC x tang. A: luego &a.

Fórmulas generales.

101. *Dados los senos y cosenos de dos arcos, hallar los senos y cosenos de su suma y diferencia.*

156 Sean dados los arcos AB $=a$, BD $=b$: su suma será AD $=a+b$; tomando BK $=b$, su diferencia será AK $=a-b$: se pide el valor de DP, CP, seno y coseno de la suma, y KO′, CO′, seno y coseno de la diferencia. Como el radio CB divide por medio al arco DK, será perpendicular á la cuerda DK y la dividirá por medio. Tiro IE paralela á CA, é IG perpendicular á CA: y siendo DI $=$ IK, será DE $=$ EH, y EI $=$ HO $=$ OK.

DP $=$ PE $+$ ED $=$ IG $+$ DE: CP $=$ CG $-$ PG $=$ CG $-$ EI; KO′ $=$ IG $-$ EH $=$ IG $-$ DE: CO′ $=$ CG $+$ GO′ $=$ CG $+$ EI. Busquemos pues las cuatro líneas IG, CG, DE, EI.

El ángulo EDI es $=$ C, por ser sus lados perpendiculares.

En el triángulo rectángulo ICG tendremos IG $=$ IC $\times$ sen. C $=$ cos. $b \times$ sen. a y CG $=$ CI $\times$ cos. C $=$ cos. $b \times$ cos. a.

En el triángulo rectángulo DEI, tendremos EI $=$ DI $\times$ sen. D $=$ sen. $b \times$ sen. a y DE $=$ DI $\times$ cos. D $=$ sen. $b \times$ cos. a. Sustituyendo será

DP, ó sen. $(a+b) =$ cos. $b \times$ sen. $a +$ sen. $b \times$ cos. a

CP, ó cos. $(a+b) =$ cos. $b \times$ cos. $a -$ sen. $b \times$ sen. a

KO′, ó sen. $(a-b) =$ cos. $b \times$ sen. $a -$ sen. $b \times$ cos. a

CO′, ó cos. $(a-b) =$ cos. $b \times$ cos. $a +$ sen. $b \times$ sen. a.

Estas cuatro fórmulas por la duplicidad de los signos pueden reducirse á dos; sen. $(a \pm b) =$ sen. $a \times$ cos. $b \pm$ cos. $a \times$ sen. b; cos. $(a \pm b) =$ cos. $a \times$ cos. $b \mp$ sen. $a \times$ sen. b.

102. *Hallar el seno y coseno de un arco duplo, triplo &a. de otro dado.*

Hágase en las fórmulas de $\mathrm{sen}.(a+b)$, $\cos.(a+b)$, $b=a$, y será $\mathrm{sen}.\ 2a = 2\ \mathrm{sen}.\ a \times \cos.\ a$, y $\cos.\ 2a = \cos^2.\ a - \mathrm{sen}^2.\ a$, seno y coseno del arco doble.

Hágase en las misma fórmulas $b = 2a$, y será $\mathrm{sen}.\ 3a = \mathrm{sen}.\ a \times \cos.\ 2a + \cos.\ a \times \mathrm{sen}.\ 2a$, y $\cos.\ 3a = \cos.\ a \times \cos.\ 2a - \mathrm{sen}.\ a \times \mathrm{sen}.\ 2a$. En lugar de $\mathrm{sen}.\ 2a$ y $\cos.\ 2a$, sustitúyanse sus valores, y será $\mathrm{sen}.\ 3a = \mathrm{sen}.\ a \times \cos^2.\ a - \mathrm{sen}^3.\ a + 2\mathrm{sen}.\ a \times \cos^2.\ a = 3\mathrm{sen}.\ a \times \cos^2.\ a - \mathrm{sen}^3.\ a$, y $\cos.\ 3a = \cos^3.\ a - \cos.\ a \times \mathrm{sen}^2.\ a - 2\cos.\ a \times \mathrm{sen}^2.\ a = \cos^3.\ a - 3\cos.\ a \times \mathrm{sen}^2.\ a$. Pongo en la 1.ª por $\cos^2.\ a$, $1 - \mathrm{sen}^2.\ a$: y en la 2.ª por $\mathrm{sen}^2.\ a$, $1 - \cos^2.\ a$; y será seno y coseno del arco triplo, $\mathrm{sen}.\ 3a = 3\mathrm{sen}.\ a - 3\mathrm{sen}^3.\ a - \mathrm{sen}^3.\ a = 3\mathrm{sen}.\ a - 4\mathrm{sen}^3.\ a$, $\cos.\ 3a = \cos^3.\ a - 3\cos.\ a + 3\cos^3.\ a = 4\cos^3.\ a - 3\cos.\ a$.

Para hallar el seno y coseno del arco cuádruplo, será $b = 3a$, &a.

Dado el seno de un arco, hallar el seno, coseno y tangente de su mitad.

En la fórmula $\cos.\ 2a = \cos^2.\ a - \mathrm{sen}^2.\ a$, pongo por $\cos^2.\ a$, $1 - \mathrm{sen}^2.\ a$, y es $\cos.\ 2a = 1 - 2\mathrm{sen}^2.\ a$, de donde $\mathrm{sen}^2.\ a = \frac{1-\cos.\ 2a}{2}$, y $\mathrm{sen}.\ a$

$= \sqrt{\frac{1-\cos. 2a}{2}}$. Haciendo $2a = m$, es $a = \frac{1}{2}m$, y sen. $\frac{1}{2}m = \sqrt{\frac{1-\cos. m}{2}}$.

En la misma fórmula pongo por $\text{sen}^2. a$, $1 - \cos^2. a$, y es $\cos. 2a = 2\cos^2. a - 1$ y $\cos. a = \sqrt{\frac{1+\cos. 2a}{2}}$: hago $2a = m$, y $a = \frac{1}{2}m$, y es cos. $\frac{1}{2}m = \sqrt{\frac{1+\cos. m}{2}}$.

Como la tangente es igual al seno dividido por el coseno, será tang. $\frac{1}{2}m = \frac{\text{sen}. \frac{1}{2}m}{\cos. \frac{1}{2}m} = \sqrt{\frac{1-\cos. m}{1+\cos m}}$.

103. *Dadas las tangentes de dos arcos, hallar la tangente de su suma y diferencia.*

Siendo tang. $(a \pm b) = \frac{\text{sen}. (a \pm b)}{\cos. (a \pm b)}$, poniendo por sen. $(a \pm b)$ y cos. $(a \pm b)$ sus valores, será tang. $(a \pm b) = \frac{\text{sen}. a \times \cos. b \pm \cos. a \times \text{sen}. b}{\cos. a \times \cos. b \mp \text{sen}. a \times \text{sen}. b}$. Partiendo numerador y denominador por $\cos. a \times \cos. b$, será

$$\text{tang}. (a \pm b) = \frac{\frac{\text{sen}. a}{\cos. a} \pm \frac{\text{sen}. b}{\cos. b}}{1 \mp \frac{\text{sen}. a}{\cos. a} \cdot \frac{\text{sen}. b}{\cos. b}}$$: y como $\frac{\text{sen}}{\cos.} = \text{tang}.$, será tan. $(a \pm b) = \frac{\text{tang}. a \pm \text{tang}. b}{1 \mp \text{tang}. a \times \text{tang}. b}$. Si $b = 45.°$ tang. $(a \pm 45.°) = \frac{\text{tang}. a \pm 1}{1 \mp \text{tang}. a}$.

Para hallar la tangente de un arco doble, hago $b = a$, y tomo el signo superior, y será tang. $2a = \frac{2 \,\text{tang}. a}{1-\text{tang}^2. a}$.

Hallar las relaciones que tienen entre sí las sumas ó diferencias de dos senos ó dos cosenos.

En las cuatro fórmulas

$$\begin{cases} \text{sen.}\,(a+b) = \text{sen.}\,a \times \cos.\,b + \cos.\,a \times \text{sen.}\,b \\ \text{sen.}\,(a-b) = \text{sen.}\,a \times \cos.\,b - \cos.\,a \times \text{sen.}\,b \\ \cos.\,(a+b) = \cos.\,a \times \cos.\,b - \text{sen.}\,a \times \text{sen.}\,b \\ \cos.\,(a-b) = \cos.\,a \times \cos.\,b + \text{sen.}\,a \times \text{sen.}\,b \end{cases}$$

hago $a+b=s$, $a-b=d$; y el arco mayor $a=\frac{1}{2}(s+d)$ y el arco menor $b=\frac{1}{2}(s-d)$.

Sumando y restando las dos primeras y luego las dos segundas, y sustituyendo será

$$\text{sen.}\,s + \text{sen.}\,d = 2\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(s+d) \times \cos.\,\tfrac{1}{2}(s-d)$$
$$\text{sen.}\,s - \text{sen.}\,d = 2\cos.\,\tfrac{1}{2}(s+d) \times \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(s-d)$$
$$\cos.\,s + \cos.\,d = 2\cos.\,\tfrac{1}{2}(s+d) \times \cos.\,\tfrac{1}{2}(s-d)$$
$$\cos.\,d - \cos.\,s = 2\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(s+d) \times \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(s-d)$$

dividiendo estas fórmulas, cada una por las que le siguen, y poniendo en lugar de $\frac{\text{sen.}}{\cos.}$, tangente, se tendrán las relaciones pedidas.

$$\frac{\text{sen.}\,s+\text{sen.}\,d}{\text{sen.}\,s-\text{sen.}\,d} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(s+d)}{\text{tang.}\,\frac{1}{2}(s-d)} \qquad \frac{\text{sen.}\,s-\text{sen.}\,d}{\cos.\,s+\cos.\,d} = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(s-d)$$

$$\frac{\text{sen.}\,s+\text{sen.}\,d}{\cos.\,s+\cos.\,d} = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(s+d) \qquad \frac{\text{sen.}\,s-\text{sen}\,d}{\cos.\,d-\cos.\,s} = \frac{1}{\text{tang.}\,\frac{1}{2}(s+d)}$$

$$\frac{\text{sen.}\,s+\text{sen}\,d}{\cos.\,d-\cos.\,s} = \frac{1}{\text{tang.}\,\frac{1}{2}(s-d)} \qquad \frac{\cos.\,s+\cos.\,d}{\cos.\,d-\cos.\,s} = \frac{1}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(s+d) \times \text{tang.}\,\frac{1}{2}(s-d)}$$

Construccion de las tablas de senos y cosenos.

104. Siendo el radio del círculo 1, sen. 30° $=\frac{1}{2}$. Conocido el seno de 30.° se puede conocer el de su mitad, el de su 4.ª parte, 8.ª 16.ª &a. hasta llegar á un arco tan pequeño, que su longitud, calcula-

da como se ha enseñado en geometría, se confunda con su seno en las notas décimales de la aproximacion.

Despues se halla el seno de 10″, partiendo el del arco hallado por las veces que contenga á 10″: pues en los arcos inferiores al hallado los senos son proporcionales con los mismos arcos.

Ahora, siendo sen. $(a + b) =$ sen. $a \times$ cos. $b +$ cos. $a \times$ sen. b y sen. $(a - b) =$ sen. $a \times$ cos. $b -$ cos. $a \times$ sen. b, sumando estas dos fórmulas, será sen. $(a + b) +$ sen. $(a - b) = 2$sen. $a \times$ cos. b. Haciendo $a = mb$, será sen. $b\,(m + 1) +$ sen. $b\,(m - 1) = 2$sen. $mb \times$ cos. b: luego sen. $(m + 1)\,b = 2$ cos. $b \times$ sen. $mb -$ sen. $b\,(m - 1)$. Conociendo, pues, los senos de dos arcos sucesivos $b\,(m - 1)$ y mb, se podrá conocer el seno de $b\,(m + 1)$, multiplicando el seno del anterior por 2cos. b y restando el seno del anterior.

Igualmente, siendo cos. $(a + b) =$ cos. $a \times$ cos. $b -$ sen. $a \times$ sen. b, y cos. $(a - b) =$ cos. $a \times$ cos. $b +$ sen. $a \times$ sen. b, sumando será cos. $(a + b) +$ cos. $(a - b) = 2$cos. $a \times$ cos. b: haciendo $a = mb$, será cos. $b\,(m + 1) -$ cos. $b\,(m - 1) = 2$cos. $mb \times$ cos. b, y cos. $b\,(m + 1) = 2$cos. $mb \times$ cos. $b -$ cos. $b\,(m - 1)$, fórmula que manifiesta para los cosenos la ley misma que para los senos.

Haciendo, pues, $b = 10''$ y conociendo su coseno, como tenemos sen. $0° = 0$, cos. $0 = 1$, y sen. $1''$ y cos $1''$, se podrán tener por las fórmulas anteriores los senos y cosenos de $2''$, de $3''$... hasta $45°$. En los arcos mayores que $45°$ el seno de un arco es igual al coseno del complemento: así bastará en las tablas encabezar en la parte inferior el complemento del arco que hay en la parte superior, y llamar seno al que es coseno para el arco superior y coseno al que es seno. Para hallar las tangentes y cotangentes han servido las fórmulas tang. $a = \frac{\text{sen. } a}{\cos. a}$ y cotang. $a = \frac{\cos a}{\text{sen } a}$, conocidos ya los senos y cosenos.

Los arcos mayores que 90° no están en las tablas: porque sus líneas trigonométricas son las mismas que las de sus suplementos; y siendo estos menores que 90°, están en las tablas.

Los tablas no contienen los valores de las líneas trigonométricas, sino sus logaritmos, porque estos son los que se emplean en el cálculo.

105. Cuando el arco no está en las tablas (como si se pidiese Log. sen. (32° 40′ 3″, 24)) se buscará el arco próximo menor que se halla en las tablas Log. sen. (32° 40′) = 9 7321932. Multiplíquese la diferencia que dán las tablas entre este seno y el siguiente (328) por la cantidad del arco, que no se halla en las tablas (3″, 24), y resulta 1063; que partido por 10, porque las tablas proceden de 10 en 10 segundos, dá 106, cantidad que añadida al seno hallado dará el que se pide, y es Log. sen. (32° 40′ 3″, 24) = 9,7322038.

Si la línea buscada es coseno ó cotangente, deberá ser sustractiva dicha cantidad: porque aumentando el arco, disminuyen coseno y cotangente.

Si dada una línea, que no se halla en las tablas (como el seno 9,7322033), se pide el arco que le corresponde, tomo su próximo menor 9,7321932, cuyo arco es 32° 40′. La diferencia 106 entre los dos multiplicada por 10 pártola por la diferencia de las tablas 328: y saldrán los segundos y decimales de segundo, que deberán agregarse al arco hallado si la línea es seno ó tangente; ó restarse si es coseno ó cotangente. El arco pedido es de 32° 40′ 3″, 23.

Resolucion de los triángulos rectángulos.

106. En la resolucion de un triángulo rectángulo, *ó se dán dos lados, ademas del ángulo recto, ó se dán un lado y un ángulo.*

Caso. 1.° *Cuando se dán dos lados, ó son los dos catetos, ó la hipotenusa y un cateto.*

Si se dán los dos catetos, sean A, B, C los tres ángulos del triángulo, siendo A el ángulo recto, y a, b, c los tres lados respectivamente opuestos: y sean los datos b y c.

La hipotenusa a se determina por la ecuacion $a = \sqrt{(b^2 + c^2)}$.

El ángulo B, por ser tang. $B = \frac{b}{c}$; y el ángulo $C = 90° - B$.

Si se dá la hipotenusa a y el cateto b, el cateto c se determina por la ecuacion $c = \sqrt{(a^2 - b^2)} = \sqrt{(a+b)(a-b)}$.

El ángulo B, por ser sen. $B = \frac{b}{a}$: y el ángulo C por ser $C = 90° - B$.

Caso. 2.° *Cuando se dá un ángulo, se dá el otro, por ser su complemento.* Si el lado conocido es la hipotenusa a, el lado $b = a .$ sen. . B, y el lado $c = a.$ sen. C.

Si el lado conocido es un cateto b, será $a = \frac{b}{\text{sen. } B}$, y $c = \frac{b}{\text{tang. } B}$. Estas fórmulas se resuelven por logaritmos, como se vé en el egemplo siguiente:

Sea dada la hipotenusa $a = 400$ v.^{s} y el cateto $b = 150$. El cateto $c = \sqrt{(400 + 150)(400 - 150)} = \sqrt{550 . 250}$. Sumo, pues, los logaritmos de 550 y 250, saco la mitad de su suma, y tengo el logaritmo de c.

$$\begin{array}{rrl} \text{L. } 550 & = & 2{,}7403627 \\ \text{L. } 250 & = & 2{,}3979400 \\ \hline & & 5{,}1383027 \\ & & 2{,}5691513 = \text{L. } c. \\ c & = & 370{,}81 \end{array}$$

Sen. $B = \frac{150}{400}$. Añado al logaritmo de 150 el complemento logarítmico de 400 y tengo el logaritmo sen. B. Buscado en las tablas, dará el ángulo $B = 22^\circ\ 11'\ 20''$.

$$\begin{array}{rrl} \text{L. } 150 & = & 2{,}1760913 \\ \text{C.}^{\text{to}} \text{ L. } 400 & = & 7{,}3979400 \\ \hline \text{L. sen. } B & = & 9{,}5740313 \end{array}$$

El ángulo $C = 90^\circ - B = 68^\circ$ ó $20'$.

$$\begin{array}{rl} 89^\circ\ 59'\ 60'' & = 90^\circ \\ 22\ \ \ 1\ \ 20'' & = B \\ \hline 67^\circ\ 58'\ 40'' & = C. \end{array}$$

Analogías de los triángulos oblicuángulos.

107. 1.ª *En todo triángulo oblicuángulo los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos.*

Dem. Sea el triángulo ABC. Desde el vértice B bajo la perpendicular BO sobre AC, y queda dividido en dos triángulos rectángulos. En el triángulo ABO, el cateto $BO = AB \times \text{sen. } A$, y en el triángulo BOC, el cateto $BO = BC \times \text{sen. } C$: luego AB

$\times$ sen. $A = BC \times$ sen. C, y como de dos productos iguales se puede formar una proporcion, será $\frac{AB}{\text{sen. } C} = \frac{BC}{\text{sen. } A}$: luego &a.

158 Si la perpendicular cayese fuera, siempre en el triángulo BAO seria $BO = BA \times$ sen. BAO, ó $= BA \times$ sen. A, por ser A suplemento de BAO y tener el mismo seno un ángulo que otro, y así siempre seria la misma la demostracion.

2.ª *En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el duplo del producto de ellos multiplicado por el coseno del ángulo comprendido.*

Dem. Está demostrado, que bajando la perpendicular BO, el cuadrado del lado BC, opuesto á un ángulo agudo A, es = á la suma de cuadrados de los otros dos lados menos dos veces el lado AC multiplicado por el segmento AO: sea, pues, $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$: será $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \times$ AO: pero en el triángulo rectángulo ABO, el cateto $AO = AB \times$ cos. $A = c \times$ cos. A: luego sustituyendo será $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times$ cos. A: luego &a. Es verdad que si el ángulo A es obtuso, el tercer término es positivo; pero como entónces cos. A es negativo, y hace dicho término positivo, la fórmula es general para todos los casos.

108. 3.ª *En todo triángulo el producto de dos lados es al producto de las diferencias de cada lado á la semisuma de los tres, como el cuadrado del radio al cuadrado del seno de la mitad del ángulo comprendido.*

Dem. Siendo $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\ \cos.\ A$, será $2bc.\ \cos.\ A = b^2 + c^2 - a^2$, y $\cos.\ A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. En la fórmula $\text{sen.}\ \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1-\cos.\ A}{2}}$, que elevada al cuadrado es $\text{sen}^2.\frac{1}{2}A = \frac{1-\cos\ A}{2}$, pongo por cos. A su valor, y es $\text{sen}^2.\ \frac{1}{2}A = \frac{1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}$

$$= \frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{4bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c)(\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c)}{bc} = \frac{(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c-c)(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c-b)}{bc}.$$

Hago $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c = p$, semiperímetro del triángulo: será $\text{sen}^2.\ \frac{1}{2}A = \frac{(p-c)(p-b)}{bc}$, de donde $bc : (p-c)(p-b) :: 1 : \text{sen}^2.\ \frac{1}{2}A$: luego &a.

4.ª *En todo triángulo la suma de dos lados es á su diferencia como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos es á la tangente de su semidiferencia.*

Dem. Sean A, B, C los ángulos y a, b, c los lados respectivamente opuestos. Siendo los lados como los senos de los ángulos opuestos, será $\frac{a}{b} = \frac{\text{sen. A}}{\text{sen. B}}$. Componiendo y dividiendo es $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{sen. A}+\text{sen. B}}{\text{sen. A}-\text{sen. B}}$: pero hemos demostrado que $\frac{\text{sen. A}+\text{sen. B}}{\text{sen. A}-\text{sen. B}} = \frac{\text{tang}\ \frac{1}{2}(A+B)}{\text{tang.}\ \frac{1}{2}(A-B)}$: luego $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{tang.}\ \frac{1}{2}(A+B)}{\text{tang.}\ \frac{1}{2}(A-B)}$: luego &a.

Resolucion de los triángulos oblicuángulos.

109. En estos, ó *se dán los tres lados, ó dos ángulos y un lado, ó dos lados y un ángulo.*

Caso 1.° Si se dán los tres lados, se suman y al semiperímetro se le llama p; y se resuelven las fórmulas sen. $\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{bc}}$, sen. $\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ac}}$, sen. $\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$.

Egemplo. Sea $a = 600$ varas, $b = 400$, $c = 320$: $p = 660$. sen. $\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{340 \times 260}{400 \times 320}}$: sumo pues los logaritmos de 340 y 260 con los complementos logarítmicos de 400 y 320.

	L. 260	= 2,4149733
	L. 340	= 2,5314789
C.to	L. 400	= 7,3979400
C.to	L. 320	= 7,4948500
		19,8392422
		9,9196211 = L. sen. $\frac{1}{2}A$

Saco la mitad de la suma y tengo log. sen. $\frac{1}{2}A$: de donde $\frac{1}{2}A = 56^\circ\ 12'\ 20''$ y $A = 112^\circ\ 24'\ 40''$.

Haciendo un cálculo semejante para sen. $\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{340 \times 60}{600 \times 320}}$, resulta $\frac{1}{2}B = 19^\circ\ 1'\ 25''$ y $B = 38^\circ\ 2'\ 50''$.

	L. 340	= 2,5314789
	L. 60	= 1,7781512
C.to	L. 600	= 7,2218488
C.to	L. 320	= 7,4948500
		19,0263289
		9,5131644 = sen. $\frac{1}{2}B$

Un cálculo semejante para sen.

L. 60	= 1,7781512
L. 260	= 2,4149733

$\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{60 \times 260}{600 \times 400}}$, C.^{to} L. $600 = 7{,}2218488$
C.^{to} L. $400 = 7{,}3979400$

dá $\frac{1}{2}C = 14^\circ\ 46'\ 14''$ y $C = 29^\circ\ 32'\ 28''$

$18{,}8129133$

$9{,}4064566 =$ L. sen. C.

Comprobacion; $A + B + C = 180^\circ$ sin error sensible (pues es $2''$)

Caso. 2.° Cuando se dán dos ángulos, se dá el tercero: pues es lo que falta á la suma de los otros dos para componer 180°.

Sea a el lado: siendo $\frac{\text{sen. A}}{a} = \frac{\text{sen. B}}{b}$, será $b = \frac{a.\ \text{sen. B}}{\text{sen. A}}$ y siendo $\frac{\text{sen. A}}{a} = \frac{\text{sen. C}}{c}$, será $c = \frac{a.\ \text{sen. C}}{\text{sen. A}}$. La aplicacion del cálculo logarítmico es fácil en este caso.

Caso 3.° Cuando se dán dos lados, ó se dá el ángulo comprendido entre ellos, ó el ángulo opuesto á uno de ellos,

Si se dá el ángulo comprendido entre los dos lados conocidos, sean a y b los lados conocidos, y C el ángulo comprendido. Restando C de 180°, tendré el valor de $A + B$: sacando la mitad, tendré el valor de $\frac{1}{2}(A + B)$. Formo despues la proporcion $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{tang.}\ \frac{1}{2}(A+B)}{\text{tang.}\ \frac{1}{2}(A-B)}$, y determino el 4.° término tang. $\frac{1}{2}(A - B)$. Conocida la semisuma y semidiferencia de los ángulos A y B, el mayor de ellos (que será el que se oponga al mayor lado), será igual á la semisuma mas la semidiferencia; y el menor será $=$ á la semisuma menos la semidiferencia.

El lado c se determina por la proporcion $\frac{\text{sen. A}}{a} = \frac{\text{sen. C}}{c}$, de donde $c = \frac{a.\ \text{sen. C}}{\text{sen. A}}$.

Egemplo. Sea $a = 420$ varas, $b = 630$, $C = 54^\circ\ 32'\ 50''$ será $A + B = 125^\circ\ 27'\ 10''$, y $\frac{1}{2}(A + B) = 62^\circ\ 43'\ 35''$. La proporcion es $\frac{1050}{210} = \frac{\text{tang. } 62^\circ\ 43'\ 35''}{\text{tang. } \frac{1}{2}(A-B)}$.

Sumo pues L. 210 y L. tang. $62^\circ\ 43'\ 35''$ con el complemento logarítmico de 1050: tendré el log tang. $\frac{1}{2}(A - B)$, y será $\frac{1}{2}(A - B) = 21^\circ\ 12'\ 10''$. El ángulo mayor $B = 83^\circ\ 55'\ 45''$, el menor $A = 41^\circ\ 31'\ 25''$.

$$
\begin{array}{rl}
\text{Log. tang. } (62^\circ\ 43'\ 30'') = & 0{,}2876988 \\
 & 258 \text{ por } 5'' \\
\hline
\text{L. tang. } (62^\circ\ 43'\ 35'') = & 0{,}2877246 \\
\text{L. } 21 = & 1{,}3222193 \\
\text{C.}^{\text{to}} \text{ L. } 105 = & 7{,}9788107 \\
\hline
 & 9{,}5887546 = \text{L. t.}^{\text{e}}\ \tfrac{1}{2}(A-B).
\end{array}
$$

Para determinar el lado c por la fórmula $\frac{a.\ \text{sen. } C}{\text{sen. } A}$, sumo L. 420 con L. sen. $54^\circ\ 32'\ 50''$ y con el complemento logarítmico de sen. A, y tengo el logaritmo de c: luego $c = 516,\ 08$ varas.

$$
\begin{array}{rl}
\text{L. } 420 = & 2{,}6232493 \\
\text{L. sen.} C = & 9{,}9109411 \\
\text{C.}^{\text{to}} \text{ L. sen. } A = & 0{,}1785332 \\
\hline
 & 12{,}7127236 = \text{L. } c.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\text{L. sen. } (41^\circ\ 31'\ 20'') = & 9{,}8214549 \\
\text{por los } 5'' \ldots\ldots & 119 \\
\hline
\text{L. sen. } (41^\circ\ 31'\ 25'') = & 9{,}8214668
\end{array}
$$

110. Últimamente, si se dán dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, pueden ocurrir muchos casos.

1.° Dados AB y BC y el ángulo A, si el la- 159
do opuesto al ángulo conocido es mayor que AB opuesto al ángulo C incógnito, el ángulo C deberá ser agudo: y se determinará por la proporcion $\frac{BC}{sen.\ A} = \frac{AB}{sen.\ C}$. El ángulo $B = 180° - A - C$: y el lado CA se determina por la proporcion $\frac{sen\ A}{BC} = \frac{sen\ B}{AC}$.

2.° Si el lado BC opuesto al ángulo dado es 160
igual á la perpendicular bajada desde B sobre AC, ó $= AB.\ sen.\ A$, el ángulo C será recto. En efecto en la proporcion $\frac{BC}{sen.\ A} = \frac{AB}{sen.\ C}$, poniendo por BC, su valor AB. sen. A, se tendrá $AB = \frac{AB}{sen.\ C}$, y $sen.\ C = 1$: luego $C = 90°$.

3.° Si el lado opuesto al ángulo conocido A es menor que la perpendicular bajada desde B sobre AC, no podrá formarse triángulo: en efecto, en la fórmula $\frac{BC}{sen.\ A} = \frac{AB}{sen.\ C}$, pongo por BC, AB. sen. A — D, siendo D el exceso de la perpendicular sobre BC, será $AB - \frac{D}{sen.\ A} = \frac{AB}{sen.\ C}$, y $sen.\ C = \frac{AB}{AB - \frac{D}{sen.\ A}}$.
Este quebrado es mayor que 1, por ser el numerador mayor que el denominador: luego sen. $C > 1$: pero ningun seno es mayor que el radio: luego es imposible formar triángulo, cuando el lado BC es menor que la perpendicular.

4.° Si el lado opuesto al ángulo A es mayor 161
que la perpendicular, pero menor que el lado AB,

los datos convendrán al triángulo ABC, en que C es obtuso, y al triángulo ABC', en que el ángulo C' es agudo: el problema tendrá dos soluciones; y será necesario saber si el ángulo, opuesto al otro lado conocido, es agudo ó es obtuso, para saber en que triángulo debe hacerse el cálculo. Si C es agudo, se tomará el arco que dén las tablas cuando se busca en ellas el valor de sen. C. Si es obtuso, se tomará el suplemento del arco que dén las tablas.

Problemas de Geodesia.

111. *1.° Medir una altura accesible por su estremo inferior.*

162 Sea la altura CD: mido la base DM $= b$. Puesto el grafómetro en M, mido el ángulo E, estando horizontal la alidada fija, y mirando por la movil el estremo C de la altura. En el triángulo rectángulo CEB, será $CB = BE \times \text{tang. } E = b \text{ tang. } E$; añadiendo á CB la altura BD $= a$ del instrumento, será la altura $CD = b. \text{ tang. } E + a$.

2.° Medir una distancia inaccesible por un estremo

165 Sea la distancia AB, y el estremo accesible A. Mido la base AC $= b$ y el ángulo A: y hago la proporcion $\frac{AB}{\text{sen. } C} = \frac{AC}{\text{sen. } B}$, de donde $AB = \frac{b. \text{ sen. } C}{\text{sen.}(A+C)}$.

3.° Medir una altura inaccesible por su estremo inferior.

163 Sea la altura CD. En el terreno, que tengo á mi disposicion, mido la base AH $= b$, y los ángulos A y H; en el triángulo AHC busco el lado

AC por la proporcion $\frac{AC}{sen.\ H} = \frac{AH}{sen.\ C}$, de donde AC $= \frac{AH \times sen\ H}{sen.\ (A + H)}$. Poniendo este valor por b en la fórmula anterior perteneciente al caso en que el estremo inferior es accesible, será $CD = \frac{b.\ sen.\ H.\ tang.\ E}{sen.\ (A + H)} + a$.

4.° *Reducir ángulos ó distancias, observadas en planos inclinados, al horizonte.*

Sea conocido el triángulo ABC observado en altura, por estar la señal B elevada sobre el horizonte. Tiro la horizontal AB′: Se pide reducir el triángulo ACB á su proyeccion horizontal ACB′. Medido el ángulo BAB′ y conocida la AB, en el triángulo rectángulo ABB′ determino AB′, BB′. En el triángulo BCB′, conocidas BC y BB′, busco la CB′. En el triángulo horizontal ACB′ conozco ya los tres lados, y podré conocer los tres ángulos. Este triángulo me hará conocer el punto B′, proyeccion de B. 164

5.° *Reducir al horizonte una longitud medida en un plano inclinado.*

Sea la longitud $AB = L$. Para determinar su proyeccion AC sobre el horizonte, en el triángulo rectángulo ABC es $AC = L.\ cos.\ A$: la diferencia entre la hipotenusa L y el lado AC es $L - L.\ cos.\ A = L\ (1 - cos.\ A)$: pero $1 - cos.\ A = 2\ sen^2.\ \frac{1}{2}A$: luego la diferencia entre L y su proyeccion es $2L.\ sen.^2.\ \frac{1}{2}A$. 165

6.° *Medir una distancia inaccesible en todos sus puntos.*

Sea la distancia AB. Mido la base CD en el 166 terreno, de que puedo disponer; mido tambien los tres ángulos en C y los tres ángulos en D. En el triángulo ACD, conocidos CD, ACD, ADC, determino AC.

En el triángulo BCD, conocidos CD, BCD, BDC, determino CB.

En fin, en el triángulo ACB, conocidos AC, CB y el ángulo comprendido ACB, determino la AB.

112. 7.° *Dado un triángulo, determinar un punto fuera de él, conocidos los ángulos que deben formar las rectas tiradas desde dicho punto á los vértices del triángulo.*

167 Conocido el triángulo ABC, y los ángulos x y z, determinar la posicion del punto D. Llamo a, b, c los lados del triángulo: y los ángulos desconocidos ABD $= y$, ACD $= u$.

En el triángulo ACD, $\frac{\text{DA}}{\text{sen.}\, y} = \frac{\text{AB}}{\text{sen.}\, x}$, de donde $\text{DA} = \frac{c.\,\text{sen.}\, y}{\text{sen.}\, x}$; y en el triángulo ABD, $\frac{\text{DA}}{\text{sen}\, u} = \frac{\text{AC}}{\text{sen.}\, z}$, de donde $\text{DA} = \frac{b.\,\text{sen.}\, u}{\text{sen}\, z}$. Igualando valores es $\frac{c.\,\text{sen.}\, y}{\text{sen.}\, x} = \frac{b.\,\text{sen.}\, u}{\text{sen.}\, z}$: luego $\frac{\text{sen.}\, y}{\text{sen.}\, u} = \frac{b\,\text{sen.}\, x}{c.\,\text{sen.}\, z}$. Sea l un ángulo cuya tangente sea $\frac{b.\,\text{sen.}\, x}{c.\,\text{sen.}\, z}$, de modo que tang. $l = \frac{b\,\text{sen.}\, x}{c.\,\text{sen}\, z}$: será tang. $l = \frac{\text{sen.}\, y}{\text{sen}\, u}$: luego $1 +$ tang. $l = 1 + \frac{\text{sen.}\, y}{\text{sen}\, u} = \frac{\text{sen.}\, u + \text{sen.}\, y}{\text{sen.}\, u}$ y $1 -$ tang. $l = 1 - \frac{\text{sen.}\, y}{\text{sen}\, u} = \frac{\text{sen}\, u - \text{sen.}\, y}{\text{sen.}\, u}$: luego $\frac{1 + \text{tang}\, l}{1 - \text{tang}\, l} = \frac{\text{sen.}\, u + \text{sen.}\, y}{\text{sen.}\, u - \text{sen.}\, y}$: ahora $\frac{1 + \text{tang.}\, l}{1 - \text{tang.}\, l} = \text{tang.}\ (45^\circ + l)$ y $\frac{\text{sen.}\, u + \text{sen}\, y}{\text{sen.}\, u - \text{sen.}\, y} = \frac{\text{tang.}\, \frac{1}{2}(u + y)}{\text{tang.}\, \frac{1}{2}(u - y)}$: luego tang. $(45^\circ + l) = \frac{\text{tang.}\, \frac{1}{2}(u + y)}{\text{tang.}\, \frac{1}{2}(u - y)}$, de donde tang. $\frac{1}{2}(u - y) = \frac{\text{tang.}\, \frac{1}{2}(u + y)}{\text{tang.}\, (45^\circ + l)}$.

Determino, pues, el ángulo auxiliar l por la fórmula tang. $l = \frac{b. \text{ sen. } x}{c. \text{ sen. } z}$: como $u + y$ es $= 360°$ $- A - x - z$, porque los cuatro ángulos de un cuadrilátero valen 360°, será conocido. Determino, pues, $u - y$, por la ecuacion tang. $\frac{1}{2}(u - y)$ $= \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}(u + y)}{\text{tang. } (45° + l)}$. Conocida la suma y diferencia de los ángulos u, y, podré determinar estos dos ángulos. Si tang. $\frac{1}{2}(u - y)$ es positivo, el ángulo u será el mayor; si negativo, u será el menor, porque entónces $u - y$ es negativo.

Conocidos los ángulos u, y, se podrán determinar las líneas CD, BD, AD, y por tanto todas las partes de la figura y la posicion del punto D.

Hemos dado en la geometría elementar la solucion gráfica de este problema.

113. 3.° *Determinar el area de un triángulo, dados dos lados y el ángulo comprendido.*

Sean dados AB, AC y el ángulo A: la area del 159
triángulo es $\frac{1}{2}$AC x BD: pero en el triángulo rectángulo ABD, es BD = BA. sen. A: luego la area del triángulo es $\frac{1}{2}$AC x AB x sen. A.

De aquí se infiere, que dos triángulos que tengan un ángulo igual, tienen sus areas proporcionales á los productos de los lados que comprenden el ángulo igual: porque sean A y B los lados que comprenden el ángulo C en un triángulo, y M, N los que comprenden el ángulo que le es igual en el otro: será la area del 1.° $\frac{1}{2}$A x B. sen. C, y la del 2.° $\frac{1}{2}$M x N x sen. C: estas dos areas, suprimiendo el factor comun $\frac{1}{2}$sen. C, están entre sí como A x B: M x N: luego &a.

9.° *Determinar el area de un triángulo, dados un lado y los ángulos.*

Sea AC el lado conocido. Hemos demostrado que el area del triángulo ABC es $\frac{1}{2}AB \times AC \times$ sen. A. Ahora como $\frac{AB}{AC} = \frac{\text{sen. C}}{\text{sen. B}}$, de donde $AB = \frac{AC\ \text{sen. C}}{\text{sen. B}}$, será el area $\frac{1}{2}AC^2 \times \frac{\text{sen. A} \times \text{sen. C}}{\text{sen. B}}$.

10.° *Determinar el area de un triángulo, dados los tres lados.*

Llamo a, b, c los lados del triángulo. Bajando la perpendicular BD, será el cuadrado de BC = á la suma de cuadrados de los otros dos lados, menos dos veces el producto de la base AC por el segmento AD, que llamo x; será $a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$; luego $x = \frac{b^2+c^2-a^2}{2b}$.

En el triángulo rectángulo BAQ, $BQ^2 = AB^2 - AQ^2$, y llamando á BQ, z, será $z^2 = c^2 - x^2$, y poniendo por x, su valor $z^2 = c^2 - \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2} = \frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2}$. Despejando de quebrados y descomponiendo el 2.° miembro en sus factores, $4b^2z^2 = (2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)$. El 1.er factor es $(b+c)^2-a^2$: el 2.° $a^2-(b^2-2bc+c^2)$, ó $a^2-(b-c)^2$. Descomponiéndolos en factores, es $4b^2z^2 = (b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)$. Haciendo el perímetro $a+b+c = 2p$, será

$b+c-a=b+c+a-2a=2p-2a$: $a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c$: $a-b+c=a+b+c-2b=2p-2b$: y será $4b^2z^2=2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)$. Partiendo ambos miembros por 2^4 ó 16, es $\frac{1}{4}b^2z^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$: estrayendo raiz cuadrada es $\frac{1}{2}bz=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$: pero $\frac{1}{2}bz=\frac{1}{2}AC\times BQ$ es la superficie del triángulo, que llamo S: luego $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$: es decir, el area de un triángulo es la raiz cuadrada del semiperímetro multiplicado por las tres diferencias que resultan restando cada lado del semiperímetro.

114. *11.° Hallar el radio del círculo circunscripto á un triángulo.*

Sea ABC el triángulo: sea $AB=c$, $BC=a$, AC 168
$=b$; OC, radio del círculo circunscripto, $=R$. Tiro OH, perpendicular á AC, y AR perpendicular á BC. Los triángulos OHC, BAR son semejantes, por rectángulos, y por tener el ángulo en B = al ángulo en O; pues ambos tienen por medida la mitad del arco AC. Luego sus lados son proporcionales, y $\frac{AB}{AR}=\frac{OC}{HC}$, ó $\frac{c}{AR}=\frac{R}{\frac{1}{2}b}$, de donde $R=\frac{\frac{1}{2}bc}{AR}=\frac{bc}{2AR}$. Multiplicando ambos términos por $BC=a$, será $R=\frac{abc}{2\times AR\times a}$. Pero $AR\times a$ es doble de la area del triángulo, que llamo S; luego $R=\frac{abc}{4S}$, es decir, el radio del círculo circunscripto á un triángulo es igual al producto de sus tres lados partido por el cuádruplo de su area.

Comparando la espresion del area, que se acaba de hallar con la del problema 8.º, que es $S = \frac{1}{2}bc.$ sen. A, resulta $R = \frac{a}{2\text{sen. A}}$, ó sen. $A = \frac{a}{2R}$, es decir, el seno de un ángulo de un triángulo viene á ser la relacion del lado opuesto al diámetro del círculo circunscripto.

12.º *Hallar el radio de un círculo inscripto en un triángulo.*

169 Sea ABC el triángulo: llamo á sus tres lados a, b, c: el radio Ox del círculo inscripto sea $= x$. Tiro OA, OB, OC: será la area ABC del triángulo $=$ AOB + BOC + AOC. Sea S la area del triángulo ABC. Como los tres triángulos parciales tienen la misma altura x, sus areas serán $\frac{1}{2}ax$, $\frac{1}{2}bx$, $\frac{1}{2}cx$: luego $S = \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}cx$: despejando de quebrados es $2S = ax + bx + cx$: luego $x = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2S}{2p} = \frac{S}{p}$: es decir, el radio del círculo inscripto en un triángulo es $=$ á su area dividida por su semiperímetro.

115. 13.º Dividir un triángulo en dos partes, que estén en una razon dada, por medio de una recta paralela á una recta dada.

170 Sea la razon dada $\frac{m}{n}$, ABC el triángulo dado, qp la recta dada, $AB = c$, APQ el triángulo que se busca, y $AP = x$; como por la hipótesi el ángulo $Q = q$, y $P = p$, el triángulo $APQ = \frac{1}{2}x^2 \frac{\text{sen. A} \times \text{sen. } p}{\text{sen. } q}$; el triángulo $ABC = \frac{1}{2}c^2 \cdot \frac{\text{sen A} \times \text{sen. B}}{\text{sen. C}}$: la ecuacion será $\frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{\text{sen. A} \times \text{sen. } p}{\text{sen. } q} = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{1}{2}c^2 \cdot \frac{\text{sen. A} \times \text{sen. B}}{\text{sen. C}}$, de donde $x^2 = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{\text{sen. B}}{\text{sen. C}} \cdot \frac{\text{sen. } q}{\text{sen. } p} c^2$, de donde esta

proporcion $(m+n)\frac{\text{sen. C}}{\text{sen. }q} : m. \frac{\text{sen. B}}{\text{sen. }p} :: c^2 : x^2$, cuyos dos primeros términos son los lados opuestos á los ángulos C y B en triángulos, en que $m+n$ y m sean los lados opuestos á los ángulos q y p.

Prolongo, pues, la recta qp hasta encontrarse con la CB prolongada. Tomo ED: EC :: $m : m+n$, y tiro DF paralela á AB: será Eq: EF :: $(m+n)$ $\frac{\text{sen. C}}{\text{sen. }q} : m. \frac{\text{sen. B}}{\text{sen. C}}$: luego $Eq : Ep :: AB^2 : AP^2$, cuyo 4.° término se halla, formando sobre Eq + EF un semicírculo, tirando las dos cuerdas al estremo del diámetro, cuyos cuadrados están en la razon de Eq á EF, y buscando una 4.ª proporcional á estas dos cuerdas y á AB; esta cuarta proporcional será AP.

Si el ángulo p es recto, sen. $p = 1$, sen. q = cos. A, y la fórmula será $x^2 = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{\text{sen. B} \times \text{cos. A}}{\text{sen. C}} c^2$, y como $\frac{\text{sen. B}}{\text{sen. C}} = \frac{b}{c}$, será $x^2 = \frac{m}{m+n}$ cos. A. bc. Pero b cos. A = AR, tirando CR perpendicular á AB: luego $x^2 = \frac{m}{m+n} c \times$ AR. Buscando, pues, una media proporcional entre AR, y $\frac{m}{m+n} c$, dá el valor de x.

14.° *Dividir un triángulo en dos partes, que tengan una razon dada por medio de una recta tirada desde el vértice.*

Para esto divido la base en la razon dada, y tiro una recta desde el vértice al punto de division. Los dos triángulos parciales que resulten, que tendrán una misma altura, serán como sus bases: es decir, en la razon dada.

15.º *Dividir un triángulo en dos partes, que estén entre sí en una razon dada, con una recta paralela á la base.*

171 Sea el triángulo dado ABC, y la razon $\frac{m}{n}$. Sea el lado AB $= a$, sea QR la paralela pedida. Sea AQ $= x$: debiendo ser $\frac{AQR}{QRCB} = \frac{m}{n}$, componiendo será $\frac{AQR}{ABC} = \frac{m}{m+n}$ ó $= \frac{m}{t}$, haciendo $m + n = t$. Pero los triángulos semejantes son como los cuadrados de sus lados: luego $\frac{AQR}{ABC} = \frac{AQ^2}{AB^2} = \frac{x^2}{a^2}$: luego $\frac{x^2}{a^2} = \frac{m}{t}$, $x = \pm\sqrt{\frac{ma^2}{t}}$, que se construye buscando una media proporcional entre a y $\frac{ma}{t}$.

172 Pero es mas elegante la construccion siguiente: tomo á continuacion una de otra dos partes CO, OH que estén en la razon de m á t. Sobre el diámetro CH describo un semicírculo. Levanto en O la OR, perpendicular al diámetro y tiro las cuerdas RC, RH á los estremos del diámetro. Sobre RH tomo RP $= a$, y tiro PD paralela al diámetro CH: RD es el valor de x. Porque siendo los cuadrados de las cuerdas tiradas á los estremos del diámetro proporcionales á los segmentos del diámetro, será $\frac{CR^2}{RH^2} = \frac{CO}{OH} = \frac{m}{t}$: pero por ser DP y CH paralelas, será $\frac{CR^2}{RH^2} = \frac{RD^2}{RP^2}$: luego $\frac{RD^2}{RP^2} = \frac{m}{t}$: comparando esta ecuacion con la del problema $\frac{x^2}{a^2} = \frac{m}{t}$ se vé, que siendo RP $= a$, será RD $= x$.

116. *16.° Dividir un triángulo en dos partes que estén en una razon dada con una recta tirada por un punto dado.*

Sea el triángulo ABC: el punto dado D: tiro 173
por él DI paralela á AC y deben ser conocidas las DI $= f$, AI $= d$. Sea AC $= b$, AB $= c$. Sea DF la recta pedida y AF $= x$. Los triángulos ABC, AFE, que tienen un ángulo igual A, son como los productos de los lados que lo comprenden: luego $\frac{AFE}{ABC} = \frac{AF \times AE}{AB \times AC}$: pero dichos triángulos deben estar en la razon $\frac{m}{m+n}$, ó $\frac{m}{t}$: luego $\frac{AF \times AE}{AB \times AC} = \frac{m}{t}$ es la ecuacion. La AE se determina por los triángulos semejantes FAE, FID, donde $\frac{AE}{ID} = \frac{AF}{IF}$, ó $\frac{AE}{f} = \frac{x}{x+d}$, y AE $= \frac{fx}{x+d}$. Sustituyendo en la ecuacion valores analíticos es $\frac{fx^2}{(x+d)\,bc} = \frac{m}{t}$, ó $ftx^2 = bcm\,(x + d)$, donde x tiene dos valores, uno positivo y otro negativo. Este segundo valor se interpreta tomando el punto F sobre A y cortando la DF las prolongaciones de AC, AB, con las cuales formará un triángulo, que estará con el dado en la razon $\frac{m}{t}$.

Si el punto dado está dentro del ángulo A, como en D', entónces todas las líneas son directas, excepto la AI: porque está en el caso anterior se suma con AB para tener la BI, y ahora es necesario restarla de AB, para tener la BI'. Hago, pues, indirecta la d y será $ftx^2 = bcm\,(x - d)$ la ecuacion de este caso.

Si el punto dado está en D'', fuera del ángulo y debajo de la AC, entónces no solo es indirecta la d, sino tambien la DI: pues antes era necesario restarla de AC para tener lo que vale la parte de esta línea comprendida entre D y la paralela á AB que pasa por C; y ahora es preciso añadir $D''I''$ á la misma AC para tener dicha distancia $D''H''$: mudo, pues, el signo de f y de d, y la ecuacion será para este caso $-ftx^2 = bcm\,(x-d)$, ó variando los signos de ambos miembros, $ftx^2 = bcm\,(d-x)$.

Es muy elegante la siguiente solucion gráfica de este problema.

174 Sea S la area del triángulo: el problema se reduce á tirar por el punto D una recta, que forme con los lados AB, AC un triángulo, cuya area sea $\frac{m}{t}$ S.

Descríbase el paralelogramo $E'EAe$, cuya area sea la dada, tirando por D una paralela á uno de los lados del triángulo, por egemplo á AB; tomando $ed = \sqrt{(E'D'^2 - ED^2)}$, será Dd la recta, que se pide.

Dem. Sean f, F las intersecciones de la recta pedida con $E'e$, eA; serán semejantes los triángulos EFD, $E'fD$, efd, y homólogos en ellos los lados ED, $E'D'$, ed: luego por ser $ed^2 = E'D'^2 - ED^2$, será $efd = E'fD - EFD$, lo que manifiesta, que el triángulo AdF es equivalente al paralelogramo, cuando el punto D está fuera del ángulo; y $E'fD = efd + EFD$, que manifiesta la misma equivalencia, cuando el punto D está dentro del ángulo.

Si el paralelogramo se hubiera formado haciendo paralelo á AC el lado, que pasa por D, hubiera resultado la segunda solucion del problema, que en el caso de estar el punto D fuera del ángulo se hubiera verificado en el ángulo verticalmente opuesto al dado.

17.º Dividir un triángulo en cuantas partes iguales se quiera con rectas tiradas desde un punto tomado en uno de sus lados. (Como toda figura se puede reducir á un triángulo, que pase uno de sus lados por un punto dado, puede servir este problema para dividir una heredad en partes iguales por medio de senderos, que vayan á parar á un pozo ó cisterna comun, de que se sirvan todos los interesados).

Sea el triángulo ABC, y el punto dado I. Divido 175
el lado AC en tantas partes iguales como se quiera dividir el triángulo, por egemplo, en 3. Tiro la BI, y por los puntos de division O, H, paralelas á la BI, OE, HD, y tirando ID, IE, estas dividirán el triángulo en tres partes iguales: porque tirando BO, BH, ABO, OBH, HBC son terceras partes del triángulo. Ahora IDBC = HBC, porque HBI = HDI. Tambien IDE = BOH: porque IBE = IBO, IBD = IBH: restando, IDE = BOH. Tambien IEA = OBA: porque EOB = EOI: añadiendo OEA, es ABO = AEI; y lo mismo se demostraria, si la division fuese en mayor número de partes.

117. *18.º Hallar el area de un paralelogramo, dados dos lados y el ángulo comprendido.*

Sea AB = a, AC = b: la area del triángulo ABC 176
es $\frac{1}{2}ab \times$ sen. A: luego la del paralelogramo, que es su doble, deberá ser $ab \times$ sen. A: el producto de los dos lados por el seno del ángulo comprendido.

19.° *Dado un rectángulo, construir otro igual, cuya base sea conocida.*

Sean A y B altura y base del 1.° : x y b altura y base del 2.°. Por la condicion será $AB = bx$ y $x = \frac{AB}{b}$: es decir, la altura del rectángulo que se busca es una 4.ª proporcional á su base y á las dos dimensiones del rectángulo dado.

20.° *Construir un rectángulo, conocida su area y la suma ó diferencia de sus lados.*

177 1.° Sea p^2 el cuadrado igual al rectángulo pedido: a la suma de sus lados, x y $a - x$ dichos lados; $ax - x^2 = p^2$; esta fórmula se construye del modo siguiente:

Sobre $AD = a$, construyo un semicírculo: levanto $AE = p$ perpendicular al diámetro: tiro EG paralela al diámetro, y por el punto F, en que corta la circunferencia, bajo FB perpendicular al diámetro: digo que AB es el valor de x: pues siendo $FB^2 = AB \times BD$, será $p^2 = AB\,(a - AB)$: luego $AB = x$; $BD = a - x$, y AB y BD los lados del rectángulo pedido. El otro valor de x es AC: pues siendo $GC^2 = AC \times CD$, tambien se verifica que $p^2 = AC\,(a - AC)$; luego los lados del rectángulo serán AC y CD, los mismos de la solucion anterior, por ser $AB = CD$.

El problema será imposible si p es mayor que $OT = \frac{1}{2}a$: pues entónces la paralela EA no corta el círculo: en efecto $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - p^2)}$, imaginario si $p > \frac{1}{2}a$.

2.º Sea p^2 el cuadrado $=$ al rectángulo, a la diferencia de sus lados, y x, $x - a$ sus lados. La ecuacion es $x(x - a) = p^2$, que se construye así: Construyo un círculo, cuyo diámetro sea $= a$. En cualquier punto A tiro la tangente $AV = p$, y la secante VN por el centro. El valor de x es VN: porque $AV^2 = VN \times VM$, ó $p^2 = VN(VN - a)$: luego los lados del rectángulo son VN y VM. El otro valor de x es negativo y es $-$ VM: pues entónces $- VN = - VM - a$, y tambien es $p^2 = - VM \times - VN$. 178

21.º *Hallar el area de un cuadrilátero, conocido un lado, las perpendiculares bajadas sobre él desde los vértices opuestos, y los segmentos que forman sobre dicho lado.*

Sea $AB = a$, $AE = b$, $FB = b'$, $DE = h$, $CF = h'$. 179
La area del triángulo ADE es $\frac{1}{2}bh$. La del triángulo CBF es $\frac{1}{2}b'h'$. La del trapecio DEFC es $\frac{1}{2}(h + h')(a - b - b')$. Sumando estas areas será el cuadrilátero $= \frac{1}{2}(bh + b'h' + ah + ah' - bh - bh' - b'h - b'h') = \frac{1}{2}(ah - b'h + ah' - bh') = \frac{1}{2}(h(a - b') + h'(a - b))$.

Si una de las perpendiculares cae fuera, se le pondrá á su segmento el signo $+$.

22.º *Hallar el area de un cuadrilátero, dadas sus diagonales y el ángulo que formán.*

Sea $OD = a$, $OC = b$, $OA = c$, $OB = d$. Como el 180
area de un triángulo es el semiproducto de dos lados por el seno del ángulo comprendido, teniendo todos los ángulos en O un mismo seno, será la area $AOD = \frac{1}{2}ac$. sen. O, $AOC = \frac{1}{2}bc$. sen. O,

$COB = \frac{1}{2}bd.$ sen. O, $DOB = \frac{1}{2}ad.$ sen. O; y la suma ó area del cuadrilátero, será $\frac{1}{2}$sen. O $(ac + bc + bd + ad) = \frac{1}{2}$sen. O $(a + b)(c + d)$: es decir, el semiproducto de las diagonales multiplicado por el seno del ángulo comprendido.

118. 23.° *Dada una figura, construir otra semejante á ella, y que esté con ella en una razon dada.*

181 Sea P la figura dada: a un lado suyo, x su homólogo en la figura X que se pide, y $\frac{m}{n}$ la razon que deben tener. Siendo las figuras semejantes como los cuadrados de sus lados homólogos, será $\frac{P}{X} = \frac{a^2}{x^2}$: luego $\frac{a^2}{x^2} = \frac{m}{n}$.

182 Esta ecuacion se construye, tomando AM y MN en la razon de m á n, describiendo el semicírculo AON, tirando la perpendicular MO y las cuerdas OA, ON, tomando $OP = a$, y tirando PQ paralela al diámetro: OQ será x. Sobre OQ homólogo de a se podrá construir una figura semejante á P; y estará con ella en la razon $\frac{m}{n}$: pues es $\frac{P}{X} = \frac{a^2}{x^2} = \frac{OA^2}{ON^2} = \frac{AM}{MN} = \frac{m}{n}$.

24.° *Dadas dos figuras, construir otra que sea semejante á la primera y equivalente á la segunda.*

183 Sea X la figura que se busca; si ha de ser semejante á P, siendo las figuras semejantes como los cuadrados de sus lados homólogos, será $\frac{X}{P} = \frac{x^2}{a^2}$: y como $X = Q$, será $\frac{x^2}{a^2} = \frac{Q}{P}$. Reduzco Q y P á cuadrados, y sea $Q = M^2$, $P = N^2$; será $\frac{x^2}{a^2} =$

$\frac{M^2}{N^2}$, ó $\frac{x}{a} = \frac{M}{N}$: busco, pues, una 4.ª proporcional á N, M y a, esta será el valor de x. Construyendo sobre ella una figura semejante á P, dicha figura será equivalente á Q.

25.° Cortar en un cuadrilátero dado un area dada con una recta, cuya direccion sea tambien dada.

Se pide cortar en el cuadrilátero BCDE un 184
area determinada con una recta, cuya direccion sea HI.

Prolongando los lados DB, EC hasta que se encuentren, en el triángulo HAI son conocidos los ángulos. En el triángulo BAC son conocidos los ángulos y el lado BC. Determino, pues, su area; y añadiéndole la que solícito cortar en el cuadrilátero, la cuestion se reduce á construir un triángulo, equivalente á la suma del triángulo ABC con el area que se quiere cortar, y semejante al triángulo AHI. La construccion es la del problema anterior.

APÉNDICE.

De los pesos y medidas.

119. Ha parecido á propósito esplicar despues de la Geometría las unidades de medida y peso, mandadas observar en España, porque los principios geométricos son necesarios para la perfecta inteligencia de las medidas de superficie y capacidad. Esplicarémos tambien el sistema décimal, establecido en Francia, y la relacion de sus unidades con las antiguas de aquel pais y con las españolas. Concluirémos dando una idea de los métodos prácticos, usados vulgarmente para la medicion de areas y volúmenes.

Medidas españolas lineares.

120. La vara legal del reyno, establecida por real cédula de 26 de enero de 1801 (1) para la medida de las líneas, es la vara de Burgos (2): se divide en 3 pies, el pie en 12 pulgadas, la pulgada en 12 líneas, la línea en 12 puntos. Tambien se divide el pie en 16 dedos, y la vara en 4 palmos, y en 2 codos.

Los múltiplos de estas medidas son el paso, que vale 5 pies; el cordel, que vale 5 pasos: la milla, que vale 1000 pasos; la legua de una hora de

---

(1) Inserta en la novísima recopilacion lib. IX. tit. IX. ley V.

(2) De esta se valió el Señor Ciscar para sus comparaciones en su *Memoria elemental sobre pesos y medidas*.

camino, que vale 20000 pies: la braza, que vale 2 varas, el estadal líneal, establecido por la citada real cédula para medir las tierras, que vale 4 varas.

Medidas españolas de superficie.

121. Vara cuadrada, pie cuadrado, pulgada cuadrada será un cuadrado, que tenga por lado una vara, un pie, una pulgada. Así la vara cuadrada tendrá 9 pies cuadrados; el pie cuadrado 144 pulgadas cuadradas, &ca.

Las medidas agrarias de superficie son el estadal cuadrado, que contiene 144 pies cuadrados: la aranzada, que es un cuadrado de 20 estadales por lado, y por tanto contiene 400 estadales cuadrados. La fanega de tierra es un cuadrado, que tiene 24 estadales por lado, y por tanto contiene 576 estadales cuadrados. La fanega se divide en 12 celemines, y el celemin en 4 cuartillos.

Los múltiplos de la fanega son la yugada, que vale 50 fanegas, y la caballería, que vale 60 fanegas.

Medidas españolas de volumen.

122. Una vara, un pie, una pulgada cúbica, son cubos, que tienen por lados una vara, un pie, una pulgada lineal. Así una vara cúbica tiene 27 pies cúbicos, y el pie cúbico 1728 pulgadas cúbicas. Espresarémos en estas medidas geométricas las medidas españolas de capacidad.

Para medir los áridos, se usa del cáhiz, que se divide en 12 fanegas, la fanega en 12 celemines, y el celemin se subdivide por mitades sucesivas, que tienen los nombres de medio celemin, cuartillo, medio cuartillo, ochavo, medio ochavo y ochavillo.

El Señor Rebollo en las *adiciones á su traduccion de la aritmética de Lacroix*, supone la media fanega equivalente á 2220 pulgadas cúbicas, lo que dá á la fanega 4440 pulgadas cúbicas.

El Señor Ciscar en la citada memoria deduce el valor de la fanega de su comparacion con el Kilolitro. Segun él, 18018 fanegas equivalen á 1000 Kilolitros, ó á un millon de litros. El litro es un cubo, cuyo lado es un decímetro; y el decímetro equivale á 4,3067 pulgadas lineares: luego el millon de litros, ó 18018 fanegas contienen 79879228 pulgadas cúbicas, lo que dá $4433 \frac{5430}{18018}$, ó en décimales, 4433,301 pulgadas cúbicas por fanega.

La citada real órden no espresa la cabida de la fanega en pulgadas cúbicas, pero prescribe las dimensiones, que han de tener el celemin, la cuartilla y la media fanega (3), y de ellas resulta que el celemin contiene $370 \frac{23}{256}$ pulgadas cúbicas, la cuartilla $1110 \frac{75}{128}$: la media fanega $2297 \frac{7}{32}$; y por consiguiente la fanega tendrá $4441 \frac{5}{64}$, $4442 \frac{11}{32}$, ó $4594 \frac{7}{32}$; ó en décimales, 4441,078; 4442,343 ó 4594,218 pulgadas cúbicas.

De estas cinco espresiones de la fanega en pul-

---

(3) Debemos advertir, que el artículo de dicha real órden, en que se designan las dimensiones de estas medidas, está omitido en la novísima recopilacion.

gadas cúbicas, las mas lejanas son la de Císcar con la que se deduce de la espresion de la media fanega. Las demas presentan errores de muy poco momento, y originados necesariamente de la dificultad de señalar sin inconmensurables las dimensiones de un sólido tan poco regular, como es un prisma trapezoidal (figura adoptada para la comodidad de la medicion en casi todas las medidas grandes de áridos), cuando es dado de antemano el volumen, que debe contener.

Adviértase ademas, que aun cuando el celemin fuese la 6.ª parte de media fanega, medida esta por 6 celemines, esperimentaria el grano al entrar en la medida 6 presiones diferentes, cuando medida con la media fanega no esperimenta mas de una. Esto disminuye algun tanto el error en exceso, que lleva la medida de la media fanega sobre la de 6 celemines; aunque debemos confesar que siempre queda dicho error sumamente considerable, pues es de un cubo de 5 pulgadas de lado, cuando menos.

Para medir los líquidos, escepto el aceite, se usa la cántara, que contiene 1289, 6 pulgadas cúbicas y sus divisiones por mitades sucesivas, que son media cántara, cuartilla, azumbre, media azumbre, cuartillo, medio cuartillo y copa.

El múltiplo de la cántara es el moyo, que contiene 16 cántaras.

Para medir el aceite se usan medidas arregladas al peso, y son la arroba *mensural*, que equivale á 1004 pulgadas cúbicas, y sus divisiones por mitades sucesivas, media arroba, cuarto de arroba, medio cuarto de arroba, libra, media libra, cuarteron ó panilla, y medio cuarteron ó media panilla.

Medidas españolas de peso.

123. La unidad de peso es la libra, que se divide en 16 onzas, y tambien en mitades sucesivas con los nombres de media libra, cuarteron y medio cuarteron.

La onza se divide en 8 dracmas, la dracma en 2 adarmes, el adarme en 3 tomines, el tomin en 12 granos.

Los múltiplos son el marco que contiene 8 onzas, y la arroba, que tiene 25 libras. El quintal tiene 4 arrobas.

En medicina y farmacia se continúa usando de la libra medicinal, que tiene 12 onzas, ó $\frac{12}{16}$ de la libra comun. La onza medicinal se divide en 8 dracmas, la dracma en 3 escrúpulos y el escrúpulo en 24 granos.

Sistema décimal.

124. En este sistema se ha tomado por unidad lineal el *metro*, diezmillonésima parte de la distancia del polo al ecuador, medida en el meridiano de Paris. Sus divisiones y múltiplos, y los de las demas unidades de medida proceden de 10 en 10, como las clases de la numeracion; anteponiendo al nombre de la unidad las palabras *deci*, *centi*, *mili* para las divisiones, y *deca*, *hecto*, *kilo*, *miria* para los múltiplos. Así el metro se divide en 10-

decímetros, el decímetro en 10 centímetros, el centímetro en 10 milímetros. El decámetro tiene 10 metros, el hectómetro ciento, el Kilómetro, mil, y el miriámetro 10000.

La unidad agraria para la medicion de terrenos es la *area*; que es un cuadrado, cuyo lado es un decámetro. Solo se usan dos múltiplos de ella, la *hectarea*, que vale 100 areas, y la *miriarea*, que vale 10000 areas.

La unidad de volúmenes es el litro, ó un cubo, cuyo lado es un decímetro. El Kilolitro contiene 1000 litros, y por consiguiente equivale á un metro cúbico. El Kilolitro es la unidad que se emplea para medir leña, y entónces se le dá el nombre de *estereo*.

La unidad de peso es la *grama*, peso de la cantidad de agua destilada, que contiene un centímetro cúbico, cuando el termómetro centígrado señala cerca de cuatro grados sobre el cero. Su múltiplo mas usado es el Kilograma, que es el peso de un decímetro cúbico de agua en su mayor grado de densidad, que es cuando el termómetro señala la graduacion ya referida.

Dos son las principales ventajas de este sistema sobre los demas. La primera, que estando tomadas sus unidades, no de un patron arbitrario, sino de la misma naturaleza, aunque se perdiesen todas las medidas existentes, seria fácil volverlas á construir. Segunda, que siguiéndose en las divisiones y en los múltiplos la progresion décupla de la numeracion vulgar, se escusa en los cálculos de pesos y medidas el uso de los complejos y de los quebrados comunes; pues para representar una unidad, sus múltiplos y divisiones, bastará pintar una cantidad décimal, cuya vírgula esté delante de la nota, que indica las unidades. Por egemplo 7 decámetros + 9 metros + 5 decímetros + 8 milímetros, se pintará así $79^{m},508$.

Este sistema, que hasta ahora solo se ha adoptado en Francia, se ha estendido en aquel reyno á las monedas y á la division del cuadrante en grados. El *franco*, unidad de moneda, se ha dividido en 10 *décimas*, y la décima en 10 *céntimas*. El cuadrante se ha dividido en 100 grados, el grado en 100 minutos, el minuto en 100 segundos, &a.

Medidas antiguas de Francia.

125. La unidad lineal era el *pie de rey*, dividido en 12 pulgadas, y cada pulgada en 12 líneas. Su múltiplo era la toesa, que equivalia á 6 pies, y la pértiga, que tenia 22.

La unidad agraria era el *arpent* real, que equivalia á un cuadrado de 10 pértigas por lado.

Habia varias unidades de volumen. Para la leña usaban la *cuerda*, que contenia 112 pies cúbicos. Para la madera servia la *solivu*, que valia 3 pies cúbicos. Para los granos, el *boisseau*, que equivalia á 2,74079 celemines españoles. Para los líquidos, la pinta, que equivalia á 1,888 cuartillos españoles, y la pinta de aceite á 1,8948 libras *mensurales* de España.

Las unidades de peso tenian los mismos nombres que las españolas; y cada una de ellas equivalia á 1,063928, unidad de peso española de la misma denominacion.

126. *Correspondencia entre las antiguas medidas francesas y las del sistema décimal.*

El metro tiene . . . . 3,07844 pies de rey.

La hectarea	2,92494	*arpents* reales.
El metro cúbico ...	29,1739	pies de rey cúbicos.
El litro	0,07687	*boisseaux.*
El litro	1,0737	pintas.
El kilograma	2,04268	libras francesas.

Correspondencia entre las medidas españolas y las del sistema décimal.

El metro tiene	1,19631	varas de Burgos.
La area	8,94469	estadales cuadrados.
El metro cúbico ...	1,71209	varas cúbicas.
El litro	0,21589	celemines.
El litro	1,98289	cuartillos de vino.
El litro ....,..	1,98971	libra *mensural* de aceite.
El kilograma	2,173474	libras españolas.

Observaciones. 1.ª El kilograma es el peso de un decímetro cúbico de agua en su máxima densidad. Equivaliendo el decímetro lineal á 4,3067 pulgadas lineares españolas, tendrá el decímetro cúbico 79,879228 pulgadas cúbicas españolas, que divididas por 2,173474 libras españolas, que tiene el kilograma, dará en pulgadas españolas el volumen necesario para contener una libra de agua destilada en su mayor densidad. Este volumen es de 36,765963 pulgadas cúbicas, ó un cúbo, cuyo lado es de 3,325 pulgadas lineares.

2.ª Diez hectolitros, equivalen, con corta diferencia, á 18 fanegas españolas, medida de áridos.

3.ª Seis pies de rey equivalen á algo menos de 7 pies españoles: pues segun las comparaciones del Señor Ciscar, se necesitan 6,00434 pies de rey para componer los 7 pies españoles.

Prácticas mas comunes de la agrimensura.

127. La regla práctica mas general para la medicion de un terreno, si es irregular su figura, y no pertenece á ninguna de las que hemos enseñado á medir en la geometría, es inscribir en él el mayor rectángulo posible, y los pedazos, que queden fuera, medirlos como triángulos; ó si son capaces de admitir un nuevo rectángulo ó trapecio, entónces los recodos quedan mas pequeños, y hacen á ojo la valuacion de ellos.

Para la formacion de estos rectángulos, las operaciones mas comunes de geometría son tirar una perpendicular y una paralela. Para tirar una perpendicular á una recta dada, usan del cartabon con dos alidadas, que se cortan en ángulo recto: alinean con la recta dada la visual de una de las alidadas, y en la direccion de la otra fijan jalones, cuya direccion es la de la perpendicular pedida. La paralela á una recta dada se determina, tirando una perpendicular á dicha recta, y despues otra perpendicular á la que se tiró primero.

Para valuar un terreno inaccesible por su medio, como un pueblo ó una laguna, le circunscriben un rectángulo, de cuya area restan los espacios comprendidos entre el rectángulo y las lindes del terreno, que se quiere medir.

Como las lindes suelen ser de figura curvilínea, irregular, con entradas y salidas, determinan la línea del linde, dirigiendo la visual, que la representa, de modo que los espacios esteriores á ella se compensen con los interiores; lo que pide, si se ha de hacer sin cometer grandes errores, mucho tino y práctica en el agrimensor.

En cuanto á la division de los terrenos, si estos tienen figura cuadrangular ó triangular, usan de los problemas relativos á la division de las areas, que pueden verse en varios autores. Bails trae muchos en su geometría. Pero lo mas comun es valuar todo el terreno en estadales ó varas cuadradas: dividir su valor en el número de partes, que se pide, y tomar ya rectángulos, ya trapecios, ya triángulos, que equivalgan á cada parte. La figura, que han de tener dichas partes, pende de circunstancias diferentes, como son la participacion comun de un pozo ó caserío, ó de la márgen de una ribera, ó los convenios y transacciones hechos entre los que han de repartir el terreno.

Otros hacen la valuacion y la division, levantando con suma exactitud el plano del terreno, y haciendo en él la medicion ó la division por medio de la escala, ó por operaciones geométricas.

Bien se vé cuan útil será, para no hallarse atado en ningun caso, ni esponerse á arbitrariedades é inexactitudes en las operaciones, que el agrimensor reuna á mucha práctica y tino en el manejo de los instrumentos, la competente instruccion en los principios de la geometría elemental y de la análisis geométrica, que lo pongan en estado de resolver todos los problemas, que puedan ocurrirle. La necesidad de esta instruccion queda bien probada con los problemas de geodesia, que hemos resuelto anteriormente, y que son por la mayor parte de un uso continuo en la práctica de la agrimensura. Así es, que los agrimensores mas hábiles emplean, señaladamente en las operaciones delicadas, el grafómetro para la medicion de los ángulos, y usan de los métodos trigonométricos, como mas seguros y exactos, que el de la escala, en la determinacion de distancias no medidas en el terreno.

Medidas de volúmenes y aforos.

128. La capacidad de los vasos cilíndricos, que contienen líquidos, se mide adoptando primeramente una unidad de medida, por egemplo, una azumbre de líquido, poniéndola en un vaso cilíndrico pequeño, cuyo diámetro esté bien medido, y señalando con mucha exactitud la altura del fluido en dicho vaso. Refiriendo á esta base y altura las del vaso cilíndrico, que se quiere medir, el producto de dichas razones dá el número de azumbres, que contiene el vaso.

Para hallar estas razones con facilidad, se construye una vara: se toman sobre una de sus caras partes iguales á la altura del fluido en el vaso, que sirve de unidad, y en la otra los diámetros del circulo doble, triplo, cuádruplo etc. de la base de dicha unidad; construccion que se hace por la propiedad conocida del cuadrado de la hipotenusa. Estas dos caras servirán para hallar la base y altura del vaso propuesto.

Si dicho vaso es cónico, se deberá multiplicar el tercio de su altura por la suma de las dos bases opuestas y de una base media proporcional geométrica entre ambas. En la práctrica multiplican la semisuma de las dos bases por la altura, método, en que se cometen grandes errores; y tanto mayores, cuanto es mayor la diferencia de ambas bases.

Si el vaso es un tonel, lo dividen por medio con una seccion paralela á las bases, y cada mitad la consideran como un cilindro de la misma altura y cuya base sea la semisuma de la seccion y de la base del tonel. Este método no es tan erroneo en los toneles, como en los vasos cónicos, ya porque la diferencia de la seccion á la base no es muy grande, ya porque anchando el tonel mas que el vaso cónico, se acerca mas al cilindro de la base media. Pero lo mejor seria, determinada la curva de revolucion, que forma el medio tonel, y que se acerca mucho á parábola, hallar la solidez del paraboloide por los métodos, que subministra el calculo integral. Solo hacemos esta observacion para que se conozca hasta qué punto es necesario profundizar en las matemáticas puras, si se quieren obtener los resultados prácticos con la debida exactitud.

Arqueo de los buques.

129. *Arquear* un buque es determinar el número de toneladas que contiene la capacidad de la bodega. Para hacer esta operacion con arreglo á ordenanza, dada por S. M. en real cédula de 19 de Setiembre de 1742, se deben tomar cinco dimensiones, que son, Eslora, Quilla limpia, Manga, Plan y Puntal.

La Eslora se mide en la altura de la primera cubierta de codaste á roda por la parte interior de la tablazon.

La Quilla se mide desde el nacimiento del Branque hasta el alefris del codaste; ó de estopa á estopa, que es lo que se llama quilla limpia, La Manga se toma en lo mas ancho de la cuaderna ó Barenga maestra sobre la primera cubierta ó por lo interior de la tablazon.

El Plan se mide sobre dicha cuaderna de cabeza á cabeza de Barenga, ó de palmejar á palmejar, que son los que pasan por las cabezas de los planes.

Puntal es la distancia que hay desde el sobreforro de la bodega hasta debajo de la tablazon de la primera cubierta sin incluir la vuelta del vaso; y se toma en el mismo sitio de la cuaderna maestra sobre el forro del plano.

Tomadas estas dimensiones en pies de Burgos, multiplíquense entre si estos tres factores; semisuma de eslora y quilla; $\frac{3}{4}$ de la manga sumados con la mitad del plan; mitad del puntal; el producto será en pies cúbicos el volumen de la bodega; multiplíquese por $\frac{100}{7019}$ y se tendrá el número de toneladas del buque. Su tercera parte se considera empleada en el peso de arboladura y víveres etc. y las otras dos terceras partes espresan la carga.

Esta operacion equivale á multiplicar la semisuma de eslora y quilla por el puntal, lo que dá el area del trapecio, que resulta del corte vertical del medio del buque, y á multiplicar despues esta area por los $\frac{3}{8}$ de la manga mas $\frac{1}{4}$ del plan. Como entre el plan y la manga hay alguna diferencia, esta operacion viene á ser multiplicar la area de dicho trapecio por la mitad de la manga y algo mas: lo que supone reducida la medida de la bodega á un prisma trapezoidal, cuyo ancho fuera poco mas de la mitad de la manga. Esta reduccion tiene mucho de arbitrario, porque aun cuando en algunos buques fuese exacta ó muy aproximada, la diversidad de las figuras en las diversas especies de barcos hace esta reduccion mas ó menos erronea, y de aquí provienen las correcciones siguientes, que son de reglamento.

A todo buque, cuyos entrepuentes no bajen de seis pies de alto, se le añadirá un 14 por 100 del arqueo: á los que tienen de 6 á 4 pies, un 10 por 100, y a los que tengan menos de 4 pies, no se añadirá nada.

Si la embarcacion es muy fina, con muchos raseles á popa y proa, estrecha de cuaderna y sin entrepuentes, se le ha de rebajar al arqueo un 8 por 100.

Si el buque tiene una figura semejante á urca, el tercer factor no será la mitad del puntal, sino los $\frac{7}{12}$ del puntal.

Si el buque está tan cargado, que no se pueden tomar las dimensiones de puntal, plan y quilla, se tomará la 7.ª parte de la Eslora, y se tendrá la quilla limpia. Multiplíquese la suma de eslora y quilla por los $\frac{7}{8}$ de la manga; al producto se quita la última nota de la derecha, y resulta el arqueo en toneladas.

La tonelada es de 70,18945 pies cúbicos.

ÍNDICE.

GEOMETRIA.

SUPERFICIES.